Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

A 14. prezentációhoz tartozó feladatsor

1. ***(K2.2.35)*** Igazoljuk, hogy az $a+b\sqrt{2}$ $(a,b\in\mathbb{Q})$ alakú számok résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

2. ***(K6.1.24, 6.1.26, 6.1.27*)*** Igaz-e, hogy $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Mikor lesz $\sqrt{b}\in K(\sqrt{c})$, ahol K részteste $\mathbb{C}$-nek? Igazoljuk, hogy a pozitív prímek négyzetgyökei függetlenek $\mathbb{Q}$ fölött.

3. ***(K6.1.3)*** Írjuk föl $2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ reciprokát $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ alakban, ahol $a,b,c\in\mathbb{Q}$.

4. ***(K6.1.15)*** Legyen θ az x^3+3x+1 polinom (egyetlen) valós gyöke. Írjuk fel a $\theta^5+2\theta^3$ és a $\theta/(\theta-3)$ számokat $a+b\theta+c\theta^2$ alakban, ahol $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Mi θ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött?

5. ***(K5.10.15)*** Határozzuk meg az alábbi számok minimálpolinomját a racionális test fölött: π, $1+i$, $\sqrt{2}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $1+\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, $\cos 20°$, egy primitív n-edik egységgyök, ahol $n=2,3,4,5,6$, illetve tetszőleges prímszám.

6. ***(K6.1.7, 6.1.25)*** Bizonyítsuk be: $\mathbb{Q}(\sqrt{6})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2}+1)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})=\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

7. ***(K6.1.23)*** Független-e $\{1,i,\sqrt{2}+3i\}$ $\mathbb{Q}$ fölött; $\{1,i,\sqrt{2}+3i\}$ $\mathbb{R}$ fölött; $\{1,\pi,1/\pi\}$ $\mathbb{Q}$ fölött?

8. ***(K6.1.24)*** Felírható-e $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ alakban $\sqrt[6]{2}$ illetve $\sqrt{2}$, ahol $a,b,c\in\mathbb{Q}$?

9. ***(K6.2.15)*** Számítsuk ki: $\sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött; $|\,\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}\,|$; $|\,\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}\,|$; $|\,\mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}):\mathbb{Q}\,|$; $\sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ fölött; $\sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt{8})$ fölött; i foka $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ fölött; $\sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}(i)$ fölött; $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött; $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött; $\sqrt{\pi}$ foka $\mathbb{Q}(\pi)$ fölött.

10. ***(K6.2.11)*** Mutassuk meg, hogy ha $K\leq L$ egy testbővítés, $\alpha,\beta\in L$, és $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ és $\mathrm{gr}_K(\beta)$ relatív prímek, akkor $|K(\alpha,\beta):K|=\mathrm{gr}_K(\alpha)\,\mathrm{gr}_K(\beta)$.

11. ***(K6.2.6)*** Legyen $K\leq L$ testbővítés, és tegyük föl, hogy $\alpha\in L$ gyöke egy n-edfokú, $K[x]$-beli polinomnak. Igazoljuk, hogy $\mathrm{gr}_K(\alpha)\leq n$. Fennáll-e itt a $\leq$ helyett oszthatóság?

12. ***(K6.2.9)*** Legyen θ nem valós gyöke x^3-2-nek. Határozzuk meg θ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ fölött, és a $\mathbb{Q}(\theta)\cap\mathbb{R}$ testet. Igaz-e, hogy ha $K\leq L\leq M$, és $\alpha\in M$, akkor $\mathrm{gr}_L(\alpha)\mid\mathrm{gr}_K(\alpha)$?

13. ***(K6.2.17)*** Igazoljuk, hogy ha a és b valós, akkor $a+bi$ pontosan akkor algebrai ($\mathbb{Q}$ fölött), ha a is és b is az.

14. ***(K6.2.18)*** Melyek algebraiak: $\pi+3$, $5\pi+6$, $\pi+\sqrt{2}$, $\pi^2+2\pi+2$, $\sqrt{\pi}$.

15. ***(K6.2.19)*** Egy algebrai szám és egy transzcendens szám összege mikor algebrai? És a szorzatuk? Egy algebrai szám négyzete lehet-e transzcendens? És a négyzetgyöke?

16. ***(K6.2.20, 2.5.18, 6.4.15)*** Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ egyetlen véges bővítése sem algebrailag zárt, és hogy egy test pontosan akkor algebrailag zárt, ha minden algebrai bővítése elsőfokú. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}_p$ nem algebrailag zárt. Melyek az algebrailag zárt véges testek?

17. ***(K6.2.21)*** Adjunk példát nem véges algebrai bővítésre.

18. ***(K6.2.22)*** Igazoljuk, hogy algebrai bővítések egymásutánja is algebrai.

19. ***(K6.3.1, 6.3.12, 6.3.13, 6.3.13)*** Hányadfokú bővítést kapunk, ha $\mathbb{Q}$-t az alábbi polinomok összes gyökével bővítjük? x^3-2, x^4-2, x^6-2, x^n-1, $(x^2-2)(x^2-3)$, $(x^2-2)(x^3-2)$.

20. ***(K6.3.3)*** Maximum hányadfokú bővítést kaphatunk, ha egy n-edfokú racionális együtthatós polinom összes komplex gyökével bővítünk?