Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat
A 13. prezentációhoz tartozó feladatsor

1. ***(K4.7.17)*** Jelölje K a komplex egységkört, P pedig a pozitív valós számok halmazát a szorzásra. A homomorfizmustétel alapján igazoljuk a következő izomorfizmusokat.
(1) $\mathbb{C}^\times / K \cong P$. Milyen geometriai alakzatok ennek a faktornak az elemei?
(2) $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.

2. ***(K4.7.27)*** Ciklikus-e a $\mathbb{Z}_{16}^\times$, illetve az $\{1, 15\}$ és az $\{1, 9\}$ szerinti faktorcsoportjai?

3. ***(K4.8.32)*** Normálosztó-e a $H \leq G$ részcsoport:
(1) $G = D_6$, $H = \{f^2, f^4, f^6 = 1\}$.
(2) $G = D_6$, $H = \{1, f^3, t, tf^3\}$.
(3) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H a diagonális mátrixok halmaza.
(4) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H az egységmátrix nem nulla skalárszorosaiból áll.
(5) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, H a felső háromszögmátrixok halmaza.

4. ***(K4.8.7, 4.8.9)*** Hasson a G csoport önmagán konjugálással: $g * x = gxg^{-1}$. Igazoljuk, hogy a pályák G konjugáltosztályai, és így minden konjugáltosztály elemszáma osztója G rendjének. Mutassuk meg, hogy $x \in G$ stabilizátora az x-szel felcserélhető elemek halmaza.

5. ***(K4.8.15, K4.8.33)*** Állapítsuk meg az alábbi csoportok konjugáltosztályait és normálosztóit: D_3, S_4, D_4, Q (a kvaterniócsoport), D_5, S_5, A_5, $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)$.

6. ***(K4.8.40)*** Legyen $N = \{e, a\}$ kételemű normálosztó a G csoportban. Igazoljuk, hogy minden $g \in G$-re $ga = ag$.

7. ***(K4.8.38)*** Melyik korábbról már ismert csoporttal izomorfak az alábbi faktorcsoportok? $D_4/\{1, f^2\}$; $S_4/\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$; $D_8/\{1, f^2, f^4, f^6\}$.

8. ***(K4.8.34)*** Igazoljuk, hogy a Lagrange-tétel megfordítása nem igaz, vagyis egy csoport rendjének egy d osztójához nem mindig létezik d elemű részcsoport.

9. ***(K4.6.14, K4.5.38)*** Legyenek A és B részcsoportok a G csoportban.
(1) Igazoljuk, hogy az AB komplexusszorzat pontosan akkor részcsoport, ha $AB = BA$, és ilyenkor $AB = \langle A \cup B \rangle$.
(2) Legyen X a B szerinti bal oldali mellékosztályok halmaza, és hasson ezen A balszorzással: $a * (gB) = agB$. Határozzuk meg a B pályáját és stabilizátorát, és igazoljuk, hogy $|AB| = |A||B|/|A \cap B|$. Melyik lineáris algebrai tételre emlékeztet ez?

10. ***(K4.6.11)*** Határozzuk meg a G csoportban a $\langle X \rangle$ részcsoportot: $G = \mathbb{Z}^+$, $X = \{28, 34\}$; $G = S_4$, $X = \{(12), (1234)\}$; $G = S_4$, $X = \{(13), (1234)\}$; $G = S_4$, $X = \{(123), (1234)\}$.

11. ***(K4.6.12)*** Mutassuk meg, hogy a D_n diédercsoportot generálják az f és t elemek. Határozzuk meg a D_5 és D_6 diédercsoportokban a $\langle t, f^2 \rangle$ részcsoportot.

12. ***(K4.6.18)*** Legyenek t és s másodrendű elemek a G csoportban és $f = ts$. Igazoljuk, hogy a $H = \langle t, s \rangle$ részcsoport minden eleme fölírható f^i vagy tf^i alakban alkalmas i egészre. Mutassuk meg, hogy ha f rendje $n < \infty$, akkor $n \geq 3$ esetén H izomorf a D_n diédercsoporttal, $n = 2$ esetén a Klein-csoporttal, $n = 1$ esetén pedig a másodrendű ciklikus csoporttal.

13. ***(K5.5.7, 5.5.11)*** Főideál-e $\mathbb{Z}[x]$-ben $(2, x)$, $(x + 1, x + 2)$ illetve $(2x + 2, x + 4)$?

14. ***(K5.5.16*)*** Van-e $\mathbb{Z}[x]$-ben olyan ideál, amely nem generálható 1000 elemmel?