Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat
A 12. prezentációhoz tartozó feladatsor

1. ***(K4.7.7)*** Igazoljuk az alább megadott $\varphi : G_1 \to G_2$ leképezésekről, hogy homomorfizmusok, majd határozzuk meg a magjukat és a képüket.
(1) $G_1 = D_n$, $G_2 = \mathbb{Z}_2^+$, $\varphi(x) = 0$ ha x forgatás, 1 ha x tengelyes tükrözés.
(2) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$ (abszolút érték).
(3) $G_1 = \mathbb{R}[x]^+$, $G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$ (vagyis φ az i behelyettesítése).

2. ***(K5.1.7)*** Legyen I egy T test fölötti $n \times n$-es mátrixgyűrűben azoknak a mátrixoknak a halmaza, melyeknek az első oszlopa végig nulla. Balideál-e, illetve jobbideál-e ez?

3. ***(K5.1.25)*** Adjunk példát egy-egy olyan részgyűrűre a $\mathbb{Q}[x]$, illetve a $\mathbb{Z}[x]$ polinomgyűrűkben, amely nem ideál, de tartalmaz minden n-re n-edfokú polinomot.

4. ***(K5.3.16)*** Mely $m > 0$ egészekre igaz, hogy a $\mathbb{Z}_m$ gyűrűben a nullosztók a nullával együtt ideált alkotnak?

5. ***(K5.2.14)*** Készítsük el az alábbi faktorgyűrűk műveleti tábláit, majd osztályozzuk őket izomorfia szerint. (Ha n egész, akkor nR az R gyűrű $\{nr \ : \ r \in R\}$ részgyűrűjét jelöli.)
$\mathbb{Z}_4/\{0\}$, $\mathbb{Z}_8/\{0,4\}$, $\mathbb{Z}_{16}/\{0,4,8,12\}$, $2\,\mathbb{Z}/(8)$, $2\,\mathbb{Z}_{16}/(8)$, $\mathbb{Z}/(4)$, $4\,\mathbb{Z}/(16)$, $\mathbb{Z}[x]/(4,x)$.

6. ***(K5.3.19)*** Igazoljuk, hogy egy T test fölötti $n \times n$-es felső háromszög-mátrixok gyűrűjében ideált alkotnak azok a mátrixok, amelyeknek a főátlójában végig nulla áll, és a szerinte vett faktor a T^n direkt hatvánnyal izomorf.

7. ***(K5.2.15)*** A $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$-ben mi az $x + (x^2+x+1)$ inverze?

8. ***(K5.2.10)*** Írjuk föl az $L = \mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ faktorgyűrű műveleti tábláit, és igazoljuk, hogy testet kaptunk. Keressünk benne $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf $\{O, E\}$ résztestet (ahol E az egységelem, O a nullelem), és adjuk meg L-ben az $Ex^2 + Ex + E$ polinom gyökeit.

9. ***(K6.7.4)*** Igazoljuk, hogy a négyelemű test mindegyik eleme gyöke az $x^4 - x$ polinomnak.

10. ***(K5.2.18)*** Melyek igazak: $\mathbb{R}[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{G}/(5) \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ ($\mathbb{G}$ a Gauss-egészek), $\mathbb{G}/(3) \cong \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$, $\mathbb{C}[x,y]/(x) \cong \mathbb{C}[y]$.

11. ***(K5.2.19*)*** Lehet-e egy nullosztómentes, de nem egységelemes gyűrű faktorgyűrűje egységelemes? Lehet-e egy nullosztómentes gyűrű faktora nem nullosztómentes? És fordítva?

12. ***(K5.1.32*)*** Bizonyítsuk be, hogy ha egy egységelemes gyűrűben $1 - ab$ invertálható, akkor $1 - ba$ is.

13. ***(K5.1.29*)*** Mutassuk meg, hogy ha egy gyűrűben csak egyetlen bal oldali egységelem van, akkor ez kétoldali egységelem.

14. ***(K5.11.12, 5.11.7, 5.11.14)*** Határozzuk meg az $i+j+k$ és $1+i+j$ kvaterniók négyzetét, inverzét és minimálpolinomját. Hányadfokú lehet egy kvaternió minimálpolinomja? Igazoljuk, hogy minden nem valós kvaterniónak pontosan két négyzetgyöke van $\mathbb{K}$-ban.

15. ***(K5.11.15*)*** Oldjuk meg $\mathbb{K}$-ban az $x^n = 1$ egyenletet.