Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

A 10. prezentációhoz tartozó feladatsor

1. ***(K2.2.8)*** Mutassuk meg, hogy minden műveletre nézve legfeljebb egy neutrális elem lehet.

2. ***(K2.2.10)*** Igazoljuk, hogy asszociatív műveletnél minden elemnek csak egy inverze lehet, sőt egy elem mindegyik balinverze megegyezik mindegyik jobbinverzével.

3. ***(K4.1.15)*** Ha f és g transzformációk, milyen kapcsolatban állnak f és gfg^{-1} fixpontjai?

4. ***(K4.1.16)*** Legyen r a $\overrightarrow{PP'}$ eltolás a síkon. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor grg^{-1} a $\overrightarrow{g(P)g(P')}$ eltolás.

5. ***(K4.1.17)*** Legyen t az e egyenesre való tükrözés. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor gtg^{-1} a $g(e)$ egyenesre való tükrözés.

6. ***(K4.1.18)*** Legyen f a P pont körüli α szögű forgatás a síkon. Igazoljuk, hogy ha g tetszőleges egybevágóság, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként.

7. ***(K4.1.36)*** Tegyük föl, hogy f és g fölcserélhető transzformációk az X halmazon. Mutassuk meg, hogy f a g fixpontjainak halmazát önmagára képzi.

8. ***(K4.1.37)*** Mikor fölcserélhető két egyenesre tükrözés a síkon?

9. ***(K4.1.23)*** Igazoljuk, hogy a D_n diédercsoportban $f^i(tf^j) = tf^{j-i}$.

10. ***(K4.1.39*)*** A tér mely egybevágóságainak a négyzete az identitás?

11. ***(K4.3.29)*** Határozzuk meg $\mathbb{Z}_m^+$ és $\mathbb{Z}_m^\times$ elemeinek a rendjeit, ahol $m = 7$, 8, 12.

12. ***(K4.3.30)*** Határozzuk meg a g elem rendjét a G csoportban, ha $G = \mathbb{R}^+$, $g = -1$; $G = \mathbb{R}^\times$, $g = -1$; $G = \mathbb{Z}_{19}^+$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{19}^\times$, $g = 17$; $G = \mathbb{Z}_{32}^+$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{32}^\times$, $g = 3$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^+$, $g = x + 1$; $G = \mathbb{Z}_{11}[x]^\times$, $g = 5$.

13. ***(K4.3.11)*** Mi a sík egybevágósági transzformációinak a rendje?

14. ***(K4.3.33)*** Hány 2, 3, 4, 5, 6, illetve 12 rendű elem van A_7-ben?

15. ***(K4.3.39)*** Mutassuk meg, hogy ha g és h relatív prím rendű, fölcserélhető elemei egy csoportnak, akkor $o(gh) = o(g)o(h)$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?

16. ***(K4.3.40)*** Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor G kommutatív. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?

17. ***(K4.3.41*)*** Mutassuk meg, hogy $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$ (a, n, m pozitív egész).

18. ***(K4.3.34)*** Mely véges csoportokban nincs prímrendű elem?

19. ***(K4.3.37)*** Igaz-e tetszőleges G csoportban, hogy ha G-ben van d rendű elem, akkor ezek száma legalább $\varphi(d)$? És az, hogy pontosan $\varphi(d)$?

20. ***(K4.3.38)*** Ciklikus-e a 3-hatványadik komplex egységgyökök csoportja a szorzásra?

21. ***(K4.3.18, 4.3.21)*** Határozzuk meg a $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_{12}^+$ és $\mathbb{Z}_{17}^\times$ összes generátorelemét.

22. ***(K4.4.32*)*** Igazoljuk, hogy egy véges csoport rendje pontosan akkor páros, ha van másodrendű eleme.

Az alábbi feladatok egy része ismétlés az Algebra és Számelmélet kurzusból.

23. ***(K4.2.18)*** Igazoljuk, hogy $(123) = (231)$, sőt általában egy ciklust bármelyik eleménél kezdve ugyanazt a permutációt kapjuk. Hány n hosszú ciklus van S_n-ben?

24. ***(K4.2.25)*** Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását és előjelét.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{bmatrix}$$

$$(1234)(35)(1432)(35)\,, \quad (12345)(234)(12345)^{-1}\,, \quad [(12)(23)(34)]^{1222}\,.$$

Tegyük meg ugyanezt az $\{1, 2, \ldots, n\}$-en értelmezett „hátulról előre" permutációval is.

25. ***(K4.2.23)*** Igazoljuk, hogy $(x_1 \ldots x_k) = (x_1x_2)(x_2x_3)\ldots(x_{k-2}x_{k-1})(x_{k-1}x_k)$.

26. ***(K4.8.14)*** Mutassuk meg, hogy ha $(x_1 \ldots x_k)$ egy ciklus az S_n csoportban, és $f \in S_n$, akkor $f \circ \big(x_1 \ldots x_k\big) \circ f^{-1} = \big(f(x_1) \ldots f(x_k)\big)$.

27. ***(K4.2.31)*** Mely $f \in S_n$ permutációk cserélhetők föl az $(1, 2, \ldots, n)$ ciklussal?

28. ***(K4.2.30)*** Igazoljuk, hogy minden páros permutáció előáll hármasciklusok szorzataként.

29. ***(K4.2.33)*** Legyen adott S_n transzpozícióinak egy halmaza. Készítsünk egy G gráfot az $\{1, 2, \ldots, n\}$ csúcshalmazon úgy, hogy ha a halmazban benne van az (ab) transzpozíció, akkor behúzzuk az a-t b-vel összekötő élet. Bizonyítsuk be a következő állításokat.

(1) Ha G összefüggő, akkor az adott transzpozíciók alkalmas szorzataként minden permutáció előállítható (a szorzatban ugyanaz a transzpozíció többször is szerepelhet).

(2) Ha i és j a G gráf különböző komponenseiben vannak, akkor az adott transzpozíciók szorzataként nem állítható elő egyetlen olyan permutáció sem, amely i-t j-be viszi.

30. ***(K4.2.34)*** Igazoljuk, hogy S_n valamennyi eleme előáll legfeljebb $n-1$ darab transzpozíció szorzataként. Van-e olyan elem, amihez $n-1$ transzpozíciónál kevesebb nem elég?

31. ***(K4.2.35*, OKTV)*** Legyenek k és t egynél nagyobb, relatív prím egészek. Az $1, 2, \ldots, n$ számok $1, 2, \ldots, n$ sorrendjéből kiindulva tetszőleges két olyan elemet fölcserélhetünk, amelyek különbsége k vagy t. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépések egymásutánjával akkor és csak akkor juthatunk el minden lehetséges sorrendhez, ha $k + t - 1 \leq n$.

32. ***(K4.2.32)*** Igazoljuk, hogy egy permutáció pontosan akkor hatványa egy ciklusnak, ha diszjunkt ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusok nélkül).