

Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

Az 1. prezentációhoz tartozó feladatsor

Előadásjegyzet, feladatsorok, megoldások, videók, mintaZH, mintavizsga:

<https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/>

Konzultáció: ewkiss@gmail.com. Absztrakt algebrai feladatok esetében a K1.2.4 jelölés a Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába* könyvre utal, ezek megoldásai elérhetők a fenti honlapon.

Gyakorlati jegy. A két **évfolyamzárthelyit** legalább elégségesre kell megírni; ha ez nem sikerül, akkor a gyakorlatvezető engedélye esetén javító zárthelyit lehet írni.

1. Lineárisan függetlenek-e (külön-külön) az alábbi mátrixok oszlop-, illetve sorvektorai? Mindegyik mátrixban adjunk meg annyi lineárisan független oszlopot, ahányat csak lehet, az összes lehetséges módon.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Igazoljuk az alábbiakat.

- (1) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
- (2) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$. Mikor lesz független $\{v, w\}$?
- (3) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független.

Általánosítsuk a (3) állítást. Ismerünk-e hasonlóan egy determináns oszlopairól?

3. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

- (a) Az \mathbb{R} feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $\{1, x, x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1 + x, 1 + 2x, 1 + 3x\}$, $\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$.
- (b) Az \mathbb{R} feletti \mathbb{C} vektortérben tetszőleges három komplex szám.
- (c) A \mathbb{Q} feletti \mathbb{R} vektortérben $\{\lg 2, \lg 3, \lg 6\}$, illetve $\{\lg 2, \lg 3, \lg 5\}$. Általánosítsunk!

4. Igazoljuk, hogy páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.

5. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$ páronként különbözők. Igazoljuk, hogy $(x - a)(x - b)$, $(x - b)(x - c)$, $(x - a)(x - c)$ lineárisan függetlenek.

6. Előáll-e a $\sqrt{3}$ az 1 és $\sqrt{2}$ számok racionális együtthatós lineáris kombinációjaként? Lineárisan függetlenek-e 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ és $\sqrt{6}$ a racionális számok teste fölött? Általánosítsunk!

7. Tegyük fel, hogy egy vektortér a, b, c, d vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d -t.

8. Mely n -ekre igaz a következő állítás: ha $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ lineárisan függetlenek, akkor $v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$ is függetlenek. Mi a helyzet más alaptest esetén?

9. Van-e három olyan vektor \mathbb{R}^2 -ben, melyek három darab kételemű részhalmaza közül rendre 1, 2, 3 független? Van-e négy olyan vektor \mathbb{R}^3 -ben, melyek négy darab háromelemű részhalmaza közül rendre 1, 2, 3, 4 független? És ha a vektorok egyike sem nulla?

10. (*) Vektortér-e \mathbb{R} az \mathbb{F}_2 test fölött a $0v = 0$, $1v = 1$ szorzásra?

11. (**) Legyen $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ a szokásos műveletekkel, és definiáljuk a vektortérműveleteket az $u \oplus v = u + v - 1$ és $\lambda \odot v = \lambda v - \lambda + 1$ képletekkel. Ellenőrizzük, hogy vektorteret kaptunk. Hogyan lehetne ezt úgy megtenni, hogy nem számoljuk végig a nyolc axiómát?

12. Tegyük föl, hogy létezik az AB mátrixszorzat. Mely állítások igazak az alábbiak közül?

- (1) AB oszlopvektorai az A oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
- (2) AB oszlopvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
- (3) AB sorvektorai a B sorvektorainak lineáris kombinációi.
- (4) AB sorvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.

13. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ tetszőleges adott mátrix. Döntsük el, melyek igazak az alábbi állítások közül (a megfelelő magasságú nullvektort 0 jelöli):

- (1) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van a 0 -tól különböző (azaz *nem triviális*) megoldása.
- (2) Ha az A sorai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.
- (3) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek egynél több megoldása van.
- (4) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek nem lehet egyértelmű a megoldása.

14. Altér-e a W halmaz a V vektortérben az alábbi esetekben?

- (1) $V = T[x]$ a T test fölött és W (1) a legfeljebb tizedfokúak és a zéruspolinom; (2) a legalább tizedfokúak és a zéruspolinom; (3) a páros fokú polinomok és a zéruspolinom; (4) azok a polinomok, ahol minden tag foka páros.
- (2) $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ az \mathbb{R} fölött, W azok a mátrixok, melyeknek (5) minden eleme racionális; (6) determinánsa nulla; (7) van két azonos eleme; (8) az első sor első két eleme azonos; (9) az elemek összege nulla; (10) az elemek szorzata nulla; (11) az elemek összege 3 ; (12) az elemek négyzetösszege 0 .
- (3) V a komplex számok vektortere \mathbb{R} illetve \mathbb{C} fölött, és $W = \{z \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$.
- (4) V a sík \mathbb{R} fölött, W pedig az első és harmadik síknegyed uniója. Adjuk meg ebben a vektortérben az összes alteret.

15. Legyen W altere az \mathbb{R} fölötti V vektortérnek, és $u, v \in V$.

- (1) Ha $u \in W$ és $v \notin W$, akkor hol helyezkedhet el $u + v$?
- (2) Ha $u \notin W$ és $v \notin W$, akkor hol helyezkedhet el $u + v$?
- (3) Ha $2u + 6v \in W$ és $3u + v \in W$, akkor igaz-e mindig, hogy $u, v \in W$?
- (4) Ha $2u + 6v \in W$ és $3u + 9v \in W$, akkor igaz-e mindig, hogy $u, v \in W$?

Minden nem igaz állításra adjunk is ellenpéldát.

16. Igaz-e \mathbb{R} fölött, hogy $x \in \langle x^2 - 1, x^2 - 2, 3x + 2 \rangle$? És $\langle x, x^2 + 2, x + 2 \rangle = \langle 1, x + 1, x^2 + 1 \rangle$?

17. Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c \rangle$, $b \notin \langle a, c \rangle$ és $c \in \langle a, b \rangle$, akkor mi a c ?

18. Mi az üres halmazt tartalmazó legszűkebb altér? Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált alternek legfeljebb két altere lehet.

19. Mikor lesz egy \mathbb{R} feletti vektortérnek véges sok altere? Mi a helyzet más testek fölött?

20. Mely lineáris egyenletrendszerekre igaz, hogy a megoldásaik alteret alkotnak?

21. Igazoljuk, hogy minden vektortérben $0 \cdot v = \lambda \cdot 0 = 0$ és $\lambda(-v) = (-\lambda)v = -\lambda v$.

22. (*) Legyen V vektortér a T test fölött. Mikor lesz két altér uniója is altér?

23. ()** Hány k -dimenziós altere van az \mathbb{F}_p feletti n -dimenziós oszlopvektorok terének?