1. A_9-ben 10 rendű.

(abcde)(xy)(uv)

$$\binom{9}{5}\cdot 4!\; 3 = 9072$$

↑ pl. $\binom{4}{2}/2$

---

2. négyzetes hasáb [illegible] : 16 $D_4 \times \mathbb{Z}_2^+$

A csúcs [illegible] 8

A fix 2 szomszéd [illegible] 2

$8\cdot 2.$

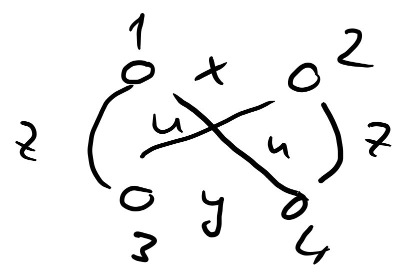
---

3. 4 csúcs, 4 színnel [illegible] páros perm A_4

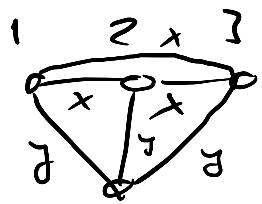
id 6 él 4^6

(12)(34) 3-féle

(123) 8 db



$4^4 \cdot 3$



$4^2 \cdot 8$

$$\frac{4^6 + 4^4\cdot 3 + 4^2\cdot 8}{12} = 416.$$

4. 64 ∃ 8 rendű

≥ 8 rendű tényező

64, 2 · 32, 16 · 2 · 2, 16 · 4, 8 · 8, 8 · 2 · 4, 8 · 2 · 2 · 2

7 db.

---

5. $G = \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_2^+$ 4 rendű

1, 2, 4 lehet ≤ 2 rendű

(a, b, c) 2-feb $2a = 0$ $2b = 0$ $2c = 0$

$a \in \{0, 2\}$ $b \in \{0, 2\}$ $c \in \{0, 1\}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$|G| = 32$

$32 - 8 = 24$

---

6. $D_8 / \{1, f^4\}$ "N" 2 rendű.

D_8 8 tükrözés, 8 forgatás

tükrözés^2 = id $(tN)^2$ = egységelem

tN van, mert $t \in N$.

∀8 tükr. 2 rendű, de 2-esével 1 m.o. Pl $tN = \{t, tf^4\}$

4 db. $(f^i)^2 \in N$, $f^i \notin N$ $i = 2, 6$ $\{f^2, f^6\} = f^2N$ 1 db m.o.

1 db

5 db.

7. S_4-ben $\langle (123), (234) \rangle \leq A_4$

$(123), (234)$ páros (3-hosszú ($\exists$ 3 rendű) ... 12-vel

$\cancel{3}$, 6, $\boxed{12}$

(123) hatványai és (234) hatványai
3 3 összesen ... áll
$(123)(234) = (12)(34)$ (1 közös)
$(234)(123) = (13)(24)$ ≥ 7 db

(A_4 normálosztói: 1, A_4, Klein)

6 elemű 2 indexű $\Rightarrow$ n.o. $\Rightarrow$ nincs.

---

8. $Q \times \mathbb{Z}_4^+ / N$ $N = \langle i, 2 \rangle$ ami n.o.

$\langle (i,2) \rangle = \{ (i,2), (-1,0), (-i,2), (1,0) \}$

elemek rendje? | (zárt a konjugálásra, mert $g(i,2)g^{-1} = (a,b)$ $a \in \{i,-i\}$)

$(\pm j, 0)^2 \in N$ $(\pm j, 1)^2 = (-1,0) \Rightarrow$ 2 elem rendje $\in N$.
" $(-1,0)$

$(\pm i, 0)^2 \in N$, $(\pm k, 0)^2$ $(\mathbb{Z}_?^+)^3$

9.

$\mathbb{Z}_{16}^{\times}$ 8 elementů $\varphi(16)=8$

$1, 3, 5, 7, 9 \equiv -7, 11 \equiv -5$ atd. $13, 15$

$4 = 0 \ (3)$ $3^2 = 9$ $3^4 = 1$ 16

nemá 8 řádů $5^4, 7^4 = 1$ 16

↳ to bude ⇒ není primitivní kořen mod 16

(vůbec tělo, lepší 2,4, pak primitivní
2x — " —

$\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$.

$Q \times \mathbb{Z}_4^+ / \{(1,0), (-1,0)\}$
není ani komm.

$(\pm i, 1)^2 = (-1, 2)$

$\langle (i,2) \rangle = \{(i,2), (-1,0), (-i,2), (1,0)\}$ $Q/\{1,-1\}$ komm (Klein)

$(j, 1)^2 = (-1, 2) \notin N$ $(j,1)N$ je 4 řádu.

$(j, 1)^2 = (1,0)$ $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$.

VI / 5.

$\mathbb{Z}_4$, $2\mathbb{Z}/(8)$, $4\mathbb{Z}/16$

HF tábláját

+-ra ciklikus

$\overline{2} = 2 + (8)$
$\overline{4} = 4 + (8)$
$\overline{6} = 6 + (8)$
$\overline{8} = 8 + (8) = 0 + (8)$

páros maradékosztály mod 8

2, 2+2, 2+2+2, 0

szorzás: $\overline{4} \cdot x$ mindig $\overline{0}$ lesz

$\overline{2} \cdot \overline{6} = \overline{4}$

Van, amivel bármit megszorozva 0-t kapunk.

$\mathbb{Z}_4$-ben nincs $x \cdot 1 = x$ → van

$\overline{4\mathbb{Z}/(16)}$ ugyanaz marad. $16 / (4x)\cdot(4y)$

$R = \mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$ – test $\quad x + (x^2+x+1)$ inverse?

↳ elemei? $\quad$ "I $\quad$ ↳ $(c+dx)+I$

$(1-x)+I$

$f(x) + (x^2+x+1) \quad f \in \mathbb{Q}[x]$

$f(x) = (x^2+x+1)\, q(x) + (ax+b) \quad a, b \in \mathbb{Q}$

↑ fok 2, $\mathbb{Q}$ test.

$f(x) - (ax+b) \in I$

$f(x) + I = (ax+b) + I$

$R \quad ax+b$ alakú polinomok, mod x^2+x+1 tartás.

$\overline{((c+dx)+I})(x+I) = 1 + I$

$(c+dx)x \equiv 1 \quad \text{mod } (x^2+x+1)$

↳ $dx^2 + cx \equiv d(-x-1) + cx = x(-d+c) - d$

$x^2 \equiv -x-1$

$-d = 1$, $-d + c = 0$ } egy. egyértelmű

$c = 1$

$ax+b \equiv ex+f \iff a = e$ és $b = f$

$x^2+x+1 \mid$ elsőfokú $\implies = 0$.

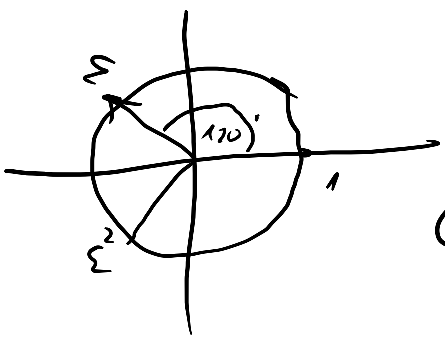
$\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1) = ?$ mivel izomorf?

[Emlék: $\mathbb{R}[x]/\underbrace{(x^2+1)}_{I} \cong \mathbb{C}$ $\quad (ax+b)+I \leftrightarrow ai+b$]

$x^2+x+1=0$ gyökei?

$$\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} \qquad \varepsilon,\ \varepsilon^2$$

$x^2+x+1 = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ 3. primitív egységgyökök



ε behelyettesítése.

$$\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f(x) \longrightarrow f(\varepsilon)$$

I Magja? ε gyöke $f(x)$-nek $\Rightarrow$ $\varepsilon^2=\bar{\varepsilon}$ is gyöke (x^2+x+1)

Képe? $f(\varepsilon)$ mi lehet? Milyen komplex szám?

$$f(x) \equiv ax+b \quad (x^2+x+1)$$
$$f(\varepsilon) = a\varepsilon+b \quad \rightarrow \quad \{a\varepsilon+b\in\mathbb{C} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

résztest $\mathbb{C}$-ben. $= \mathbb{Q}(\varepsilon)$

$\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)=K$ $\qquad$ x^2+x+1 irred. $\mathbb{Z}_2$ fölött $\Rightarrow$ test.

Mi ez a test: 4 elemű $\mathbb{Z}_2$

$\boxed{ax+b+K}$ $\quad a,b\in\mathbb{Z}_2$

$0,\ 1,\ x,\ x+1$. mellékosztály.

$x+K \overset{\text{def}}{=} \varepsilon$ $\quad$ Jelölés $\qquad$ $1+K \overset{\text{def}}{=} 1$, $\quad 0+K = 0$

$x+1+K = \varepsilon+1$

$\boxed{0,\ 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon+1}$

szorzási tábla $\qquad \varepsilon^2 = -\varepsilon-1 = \eta$

$(\varepsilon^2+\varepsilon+1=0)$

$\boxed{1+1=0,\quad -1=1}$

$\varepsilon+\varepsilon=0$

$x+x=0$ $\mathbb{Z}_2[x]$-ben!

+	0	1	ε	$\varepsilon+1$ ($=\eta$)
0	0	1	ε	η
1	1	0	η	ε
ε	ε	η	0	1
$\eta=\varepsilon+1$	η	ε	1	0

Klein.

·	0	1	ε	$\varepsilon+1$ ($=\eta$)
0	0	0	0	0
1	0	1	ε	η
ε	0	ε	η	1
$\eta=\varepsilon+1$	0	η	1	ε

TEST

↗ KARAKTERISZTIKA ??

PRÍMTEST ??

$\varepsilon(\varepsilon+1) = \varepsilon^2+\varepsilon = -1 = 1$

$(\varepsilon+1)^2 = \varepsilon^2+1 = \varepsilon+1+1 = \varepsilon.$

$\mathbb{R}[x]/(x^2+2)$ test $\quad x^2+1$ irred $\mathbb{R}$ fölött

$\mathbb{R}[x]/(x^2-1)$ nem test $\quad x^2-1$ nem ↑

$(x^2-1) = I$

↳ $[(x-1)+I][(x+1)+I] = x^2-1+I = I$ nullam.

↑ nullosztó ⇒ nem test.

↳ Melyik test? $\mathbb{C}$ $\quad \varphi : f(x) \longmapsto f(\sqrt{2}i)$

$\text{Kép}\{a+b\sqrt{2}i \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$

↳ Micsoda?

$\text{Mag} = \text{Ker}\,\varphi = (x^2+2)$

↳ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ direkt szorzat

HF vilg !!

$\varphi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$f(x) = (f(1), f(-1))$

HF $\text{Ker}\,\varphi$, $\text{Im}\,\varphi = ?$