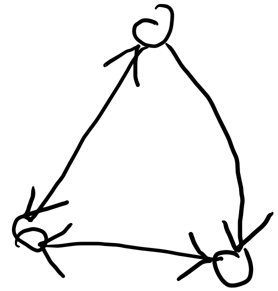
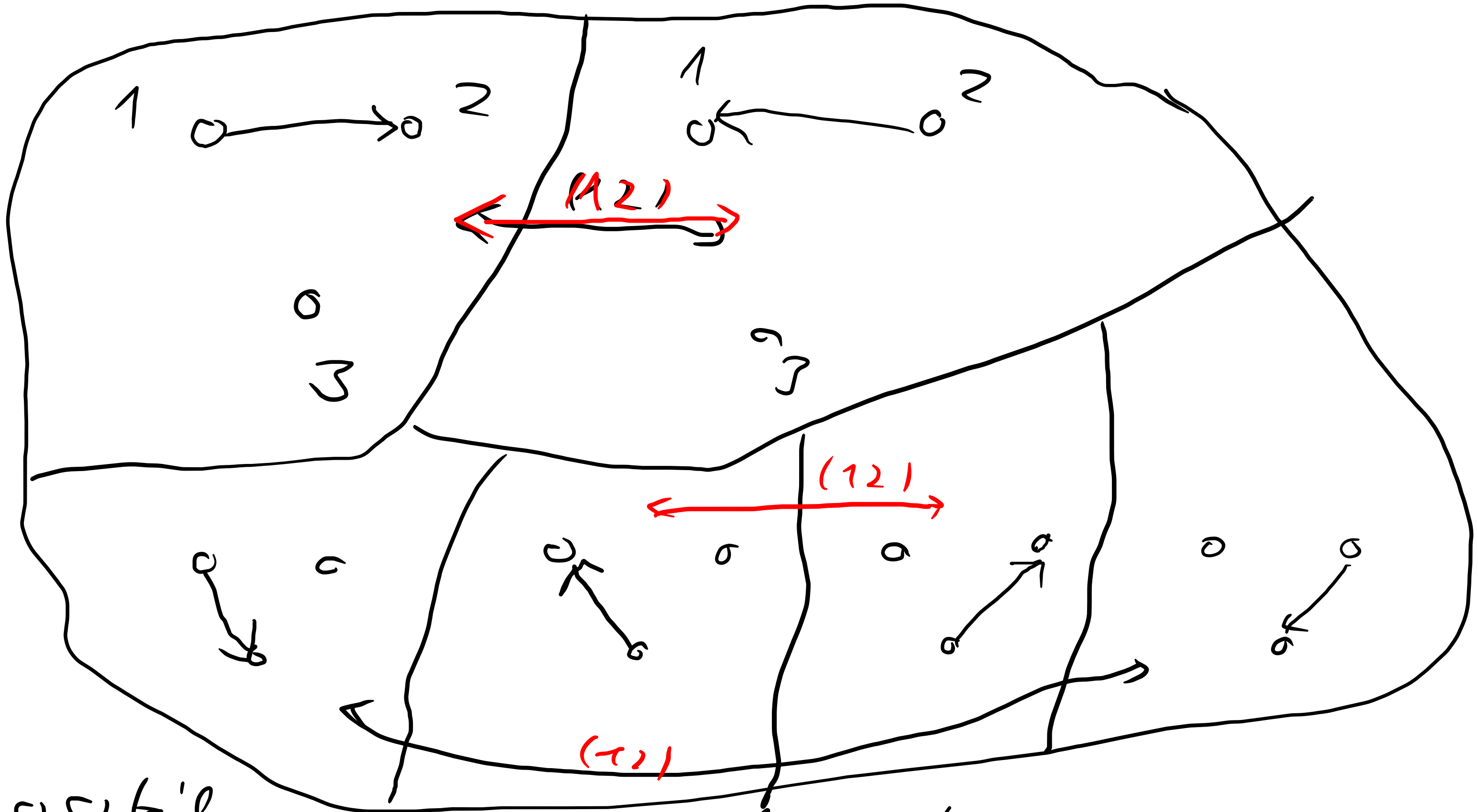
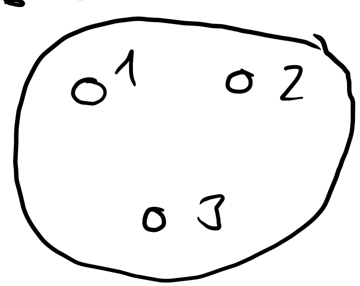


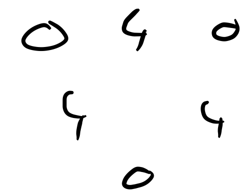
egy darab izomorfia-osztály 6 eleme.



Az osztályokat számoljuk.



← egy másik osztály.



$4^3 = 64$ számozott gráf.

64 elemű hat S_3.

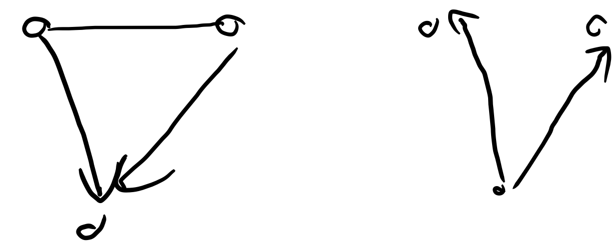
S_3 pályái az izom. osztályok.

id 64 fixpont

(12) 1 ∘ 2 ∘ 2

4 ···> egyél

∘ 3



8 gráf 3 ciklus $8 \times 3 = 24$

(123) 4-féle gráf, 2 3-as ciklus

$$\frac{64 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{6} = 16 \checkmark$$

egyél

IV/4. $\varphi : D_4 \to \mathbb{Z}_2^+$ $\quad \operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi$

forg $\to 0$

tükr. $\to 1$

$\{0,1\} \cong D_4/\langle f \rangle = \{1, f, f^2, f^3\}$.

$\mathbb{Z}_2^+$

forgatások.

$\varphi : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ $\quad \varphi(z) = |z|$

$\mathbb{R}^{poz} \cong \mathbb{C}^\times/$egységkör.

$\mathbb{R}^{poz} = \operatorname{Im}\varphi$

$\varphi(f) = f(i)$

$\mathbb{R}[x]^+ \to \mathbb{C}^+$

$\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{C}$ $\quad ax + b \to ai + b$

$\mathbb{C}^+ \cong \mathbb{R}[x]^+/(x^2+1)$

(e.a.)

$\cancel{D_3}$, $\cancel{S_4}$, $\cancel{D_4}$, $\cancel{Q}$, D_5, $\cancel{S_5}$, $\cancel{A_5}$, $GL(2,\mathbb{Z}_2)$.

$1, f, \dots, f^4$
$t, tf, \dots, tf^4$

$C(f) = \langle f \rangle \quad ft \neq tf$
$C(t) = \langle t \rangle \quad$ 5 indexű.
$\Rightarrow t$-nek 5 konjugáltja.

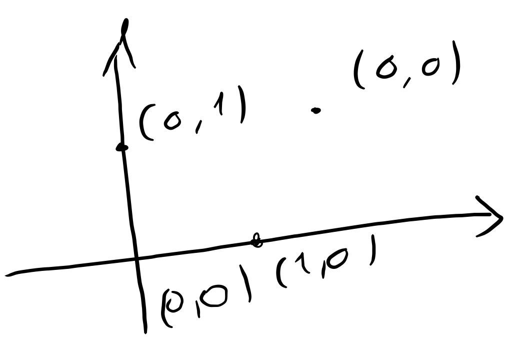
$1 \quad f, f^{-1} \quad f^2, f^{-2}$
t, tf, tf^2, tf^3, tf^4

Nd: $\{1\}, \langle f \rangle, D_5$.

D_p-re is, p prím.

$GL(2,\mathbb{Z}_2)$ invertálható mátrixok csoportja $\mathbb{Z}_2$ test felett.
2×2-es
$\| $
$GL(2,2)$

Hány mátrix? Z^4-ből hány invertálható?
4 vektor $\mathbb{Z}_2^2$ vektortérben.



Invertálható = bijektív. $(0,0) \to (0,0)$
lineáris.
max 6 db. $S_{\{(0,1),(1,0),(1,1)\}}$
ennek része. Mind a 6 jó lesz (lineáris)

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

---

6 db $\neq 0$ det mátrix $\mathbb{Z}_2$ fölött.

$\exists$ 6 db elem $GL(2,2)$-nek $\leq S_3$

$\Rightarrow \quad GL(2,2) \cong S_3$

(a kompozíció művelet)

$D_4 / \underbrace{\{1, f^2\}}_{N} \cong ?$ Elemszám: $8/2 = 4$.

Klein, ciklikus? Elemrend elöbbi elemek négyzete.

fN rendje 2: $f^2 \in N$ de $f \notin N$

tN — " — : $t^2 \in N$ de $t \notin N$

f, t nincsenek egymás mellékosztályában mert $ft^{-1} \notin N$.

$\Rightarrow \exists$ két van rendű, amiknek a négyzete 1 $\Rightarrow$ Klein.

$S_4 /$ térfelap $\quad 24/4 = \boxed{6}$

$\{ id, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \} = N$

6 elemű csoport 2 van: ciklikus, diédér. $\cong S_3$

kommutatív / nem kommutatív

$(12)N \cdot (123)N$ felcserélhető?

$(12)(123)N \qquad (123)(12)N$

$(1)(23)N \overset{?}{=} (13)N$

$(23)(13)^{-1} \overset{?}{\in} N \Longrightarrow$ Diédér $\boxed{\cong S_3}$

$(123) \notin N.$

$\underline{\text{II}}$ m.o. $H = 4$ stabilizátora. $h \in$

$\{ id, (12), (13), (23), (123), (132) \} = S_3$

$\varphi\ g \longleftrightarrow gN$ izomorfizmus.

művelettartás triviális. Bijekció

$g, h \in H \qquad H \cap N = \{id\}$

$gh^{-1} \in H$, $\in N \Rightarrow gh^{-1} = id \Rightarrow g = h.$

$D_8 / \{1, f^2, f^4, f^6\}$ $16/4 = \boxed{4}$

HF $f^2 \in N$, $t^2 \in N$ $\Rightarrow$ Klein.

IV/11 Lagrange megfordítása

$d \mid |G| \overset{?}{\Rightarrow} \exists$ d rendű részcsop.

Sőt nem igaz! Pl. prímhatványrendűre igaz.

A_5 egyszerű. $d = ?$

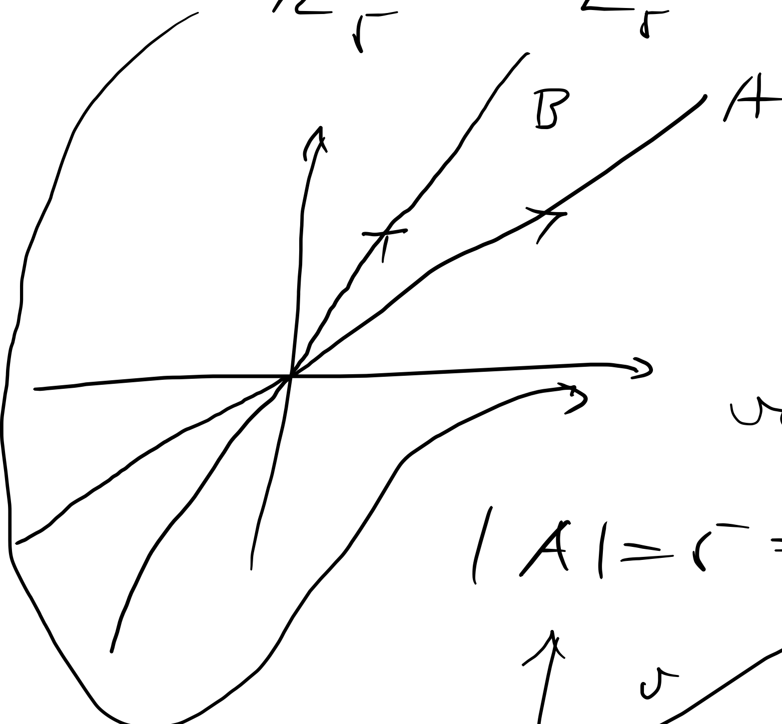
$|A_5| = 60$ $d = 30$ $30 \mid 60$

$H \leq A_5$ $|H| = 30$ $|G : H| = \frac{60}{30} = \underline{\underline{2}}$

$\Rightarrow$ 2 indexű $\Rightarrow$ normálosztó $\lightning$

A_5 egyszerű.

$\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ hány direkt felb?



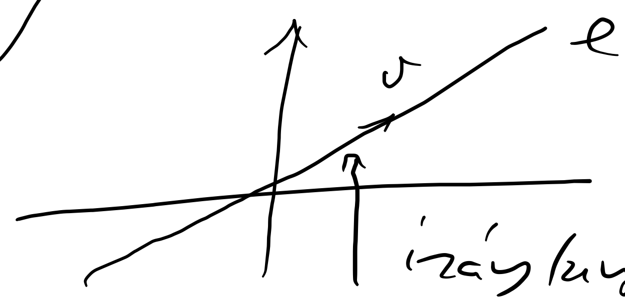
$A \cap B = \{0\}$

$A + B =$ össz

2 dim. egyenes.

vektortér $\mathbb{Z}_5$ fölött

$|A| = 5 = |B|$ ez 25 elemű.



$\langle v \rangle = e$ $\quad v \neq 0$

24 v van.

iránytangense?

$y = ax + b$ $\quad b = 0$

$a = 0, 1, 2, 3, 4$ és a függőleges

$(24/4 = 6)$

$\boxed{6\text{db}}$ egyenes

$\binom{6}{2}$ direkt felb.

$$S_8 \geq H \cong S_4 \times S_4$$

$$A \cdot B = H \qquad A, B \cong S_4$$

$$A \cap B = \{id\}$$

A = 5, 6, 7, 8 fix. $\cong S_4$

B = 1, 2, 3, 4 mind fix $\cong S_4$

Ez jó, mert $a \in A$, $b \in B \Rightarrow ab = ba$

diszjunkt halmazon ható

permutációk felcserélhetők.

T/9 $\quad \mathbb{R}^\times, \mathbb{R}^+, \mathbb{C}^\times$ van-e izomorf

4 rendű: $\emptyset \quad \emptyset \quad \pm i$ $\qquad$ nincs

2 rendű: $-1, \quad \emptyset \quad -1$

<u>DE</u> $\quad x \longmapsto 10^x$ izom

$\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^\times$ pozitív elemei!

$$\overset{2}{\mathbb{Z}_2^+},\ \overset{3}{\mathbb{Z}_3^+},\ \overset{4}{\mathbb{Z}_4^+},\ \overset{8}{\mathbb{Z}_8^+}$$

$$\underset{2}{\mathbb{Z}_3^\times},\ \underset{4}{\mathbb{Z}_5^\times},\ \underset{2}{\mathbb{Z}_6^\times},\ \underset{4}{\mathbb{Z}_8^\times},\ \underset{4}{\mathbb{Z}_{12}^\times}$$

$$\underset{2}{S_2},\ \underset{3}{A_3},\ \underset{6}{S_3},\ \underset{6}{D_3},\ \underset{8}{D_4},\ \underset{8}{Q},\ \left(\underset{6}{GL(2,2)} \cong S_3\right)$$

---

2 (vindig cikličen): $\mathbb{Z}_2^+, S_2$

3 $\mathbb{Z}_3^+, A_3$

4 Klein $\mathbb{Z}_8^\times, \mathbb{Z}_{12}^\times$

ciklične $\mathbb{Z}_4^+, \mathbb{Z}_5^\times$

6 ciklične $\emptyset$

$S_3 \cong D_3 \cong GL(2,2)$

8 $\mathbb{Z}_8^+$ ciklična

Q

D_4

8 izrachi ontalg.

15. $N = \{e, a\} \triangleleft G \qquad e \neq a$

$\Rightarrow \; ag = ga \quad \forall g \in G.$

<u>Biz.</u> $\quad gag^{-1} \in N$

$gag^{-1} = e \implies a = g^{-1}g = e$ ↯

vagy

$gag^{-1} = a \implies ga = ag$ ✓

3 elemű is lehet: $S_3 \triangleright \{id, (123), (132)\}$ de (123) és (12) nem felcserélhetők.