

Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat
Második zárthelyi (2025. május 6.) — eredmények és pontozás

1. A transzformáció mátrixa a szokásos bázisban

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ pont}).$$

Ez nem önadjungált (1 pont). Mivel MM^* az egységmátrix, ezért A unitér, és így normális is (azaz ONB-ben diagonalizálható) (1 + 1 pont). Legyen $v = (1, i, 1)^T$. Az A leképezés definíciója szerint $A(v) = (1, -1, i)^T$ (1 pont), ezért $\langle v, A(v) \rangle = \bar{1} \cdot 1 + \bar{i} \cdot (-1) + \bar{1} \cdot i = 1 + i + i = 1 + 2i$ (1 pont).

2. A kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (1 pont), a karakterisztikus polinom $(-x)(3-x)-4$ (1 pont), a sajátértékek 4 és -1 , ezért az alak indefinit (1 + 1 pont). A sajátvektorok $(1, 2)^T$ és $(2, -1)^T$ (1 pont), és így a négyzetösszeg alak

$$4\left(\frac{x+2y}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right)^2 \quad (1 \text{ pont}).$$

3. Legyen $b_1 = (1/\sqrt{2})(1, 1, 0)$ (1 pont) és $v = (2, 0, 1) \in W$ (1 pont). Ekkor a Gram-Schmidt eljárás képletével b_2 az $(1, -1, 1)$ normáltja, azaz $1/\sqrt{3}$ -szorosa (2 pont). A W sík normálvektora $n = (1/\sqrt{6})(1, -1, -2)$ (1 pont), ezért a keresett távolság $|\langle n, (1, 2, 3) \rangle| = 7/\sqrt{6}$ (1 pont).

4. Tudjuk, hogy α minimálpolinomja $x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)x + N(\alpha)$, jelen esetben $x^2 - 4x + 13$ (2 pont), ezért a kvaternió négyzete $4(2 + 2i + j + 2k) - 13 = -5 + 8i + 4j + 8k$ (2 pont), inverze pedig a konjugáltja elosztva a normájával, ami $(2 - 2i - j - 2k)/13$ (2 pont).

5. Mivel három darab t van a képletben, a szorzat tükrözés, aminek a rendje 2 (4 pont). Ezért az index $(2 \cdot 12)/2 = 12$ (2 pont). (Az $f^i t = t f^{-i}$ azonosságot használva az adott elem t -vel egyenlő.)

6. Tizedrendű elem csak $(abcdefghjk)(mn)$ vagy $(abcde)(fg)(hk)$ alakú lehet (1 + 1 pont). Az első típusúak száma $9! \binom{12}{2}$ (2 pont), a második típusúaké $4! \binom{12}{5} \binom{7}{4} 3$ (2 pont).

7. Ha f az öt csúcsú teljes gráf csúcsainak egy permutációja, akkor f a teljes gráf éleit is permutálja: az ab él képe az $f(a)f(b)$ él. Tekintsük ennek a permutációnak a ciklusait. Például ha $f = (abcde)$, akkor az ab, bc, cd, de, ea élek alkotnak egy 5 hosszúságú ciklust, az ac, bd, ce, da, eb élek pedig a másikat. Ha egy G részgráfnak f szimmetriája, és G -nek pl. ab éle, akkor az ab élet tartalmazó ciklusnak mind az 5 éle be kell, hogy húzva legyen G -ben. Ugyanez igaz a másik ötösciklus éleire is. Vagyis G négyféle lehet, azt kell eldönteni, hogy melyik ciklus éleit vesszük be. Általában ha az f -et a teljes gráf élein tekintve k darab ciklust kapunk, akkor az f permutáció 2^k részgráfnak lesz szimmetriája.

Az A_5 csoport elemeinek ciklusfelbontása a következő lehet: id (1 elem), $(abcde)$ (24 elem), (abc) (20 elem) és $(ab)(cd)$ (15 elem) (1 pont). Az identitáshoz 2^{10} részgráf tartozik (1 pont), $(abcde)$ -hez most láttuk, hogy 2^2 (1 pont). Hasonlóan (abc) -hez 2^4 (1 pont), $(ab)(cd)$ -hez pedig 2^6 (1 pont). Ezért a végeredmény $(1024 + 24 \cdot 4 + 20 \cdot 16 + 15 \cdot 64)/60 = 40$ (1 pont).

8. Mivel $x^2 + 2$ másodfokú, a maradékosztályok reprezentánsai az $ax + b$ alakú polinomok lesznek, azaz 9 darab (1 pont). Az R nem test, mert $x^2 + 2$ nem irreducibilis $\mathbb{Z}_3$ fölött, hiszen ± 1 gyöke (1 + 1 pont). (Valójában $x + 1$ és $x - 1$ osztályának szorzata nulla, tehát nem is nullosztómentes.)

Ha $x + (x^2 + 2)$ inverze $(ax + b) + (x^2 + 2)$, akkor szorzatuk $1 + (x^2 + 2)$. Mivel $x^2 \equiv -2$ modulo $x^2 + 2$, ezért $x(ax + b) \equiv -2a + bx = 1$, ahonnan $a = -1/2 = 1$ és $b = 0$. Vagyis az $x + (x^2 + 2)$ inverze önmaga (3 pont).