Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat

Első zárthelyi (2025. március 25.) — eredmények és pontozás

1. Pontosan akkor, ha az $\alpha(x^2-4)+\beta(x^2+2x-8)+\gamma(x^2+x+c)=x^2$ összefüggés nem teljesül semmilyen α, β, γ valós skalárokra (1 pont). Az x hatványainak együtthatóit kiszámítva lineáris egyenletrendszer adódik, ennek helyes felírása 2 pont. Akkor lesz tilos sor, ha $c=-6$ (3 pont). Azért az észrevételért, hogy a három polinomnak akkor van közös gyöke ($x=2$), ha $c=-6$, és ezért $c=-6$ megfelelő érték, 3 pont jár.

2. A bázistranszformáció képletének alkalmazásához az új bázis elemeit fel kell írni a régi segítségével. Nyilván $(1,0)=-1\cdot(0,1)+1\cdot(1,1)$ és $(1,2)=1\cdot(0,1)+1\cdot(1,1)$, ezért $S=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ (1 pont), ennek inverze $(1/2)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ (1 pont), így a képlet szerint az új mátrix $S^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}S=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/2\\ 1/2 & 3/2\end{pmatrix}$ (1 pont). A $(2,3)$ pont képének kiszámításához meg kell határoznunk e pont koordinátáit a régi bázisban (számolhatnánk az új bázisban is). Nyilván $(2,3)=1\cdot(0,1)+2\cdot(1,1)$. Ezért a $[C(v)]=[C][v]$ képletet a régi bázisban alkalmazva $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$, vagyis a $(2,3)$ pont képe $2\cdot(0,1)+3\cdot(1,1)=(3,5)$ (3 pont).

3. A W_2 nem altér, mert például $-1+(1-i)x$ és $1+(1+i)x$ elemei, de az összegük nem (2 pont). A W_1 azokból az $a+bx+cx^2$ polinomokból áll, melyekre $0=a+(a+bi-c)=2a+bi-c$ (2 pont). Ezek tehát az $a+bx+(2a+bi)x^2$ alakú polinomok, bázist alkot pl. $1+2x^2$ és $x+ix^2$ (2 pont).

4. A B nem lineáris, ha $M=E$ az egységmátrix, akkor $B(2E)=8$, de $2B(E)=4$ (2 pont). Az A lineáris (0 pont), mátrixa a szokásos bázisban

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ (4 pont).}$$

5. A karakterisztikus polinom $x^2(x-1)^2$ (1 pont), a 0-hoz tartozó sajátaltér az $(x,y,0,-x-y)^T$ alakú vektorokból áll és kétdimenziós (1 pont), az 1-hez tartozó sajátalteret $(0,0,1,0)^T$ generálja (1 pont). A minimálpolinom $x(x-1)^2$ (2 pont), a Jordan-alakban a 0 sajátértékhez két 1×1-es blokk tartozik, az 1 sajátértékhez pedig egy 2×2-es (1 pont).

6. Az F, F^2, F^3, F^4 és T mátrixa rendre $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, E és $\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ a szokásos bázisban (1 pont). Az első négy mátrix által generált altér az $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ alakú mátrixokból áll, tehát 2 dimenziós (2 pont), az $[I]$ és $[T]$ pedig a $\begin{pmatrix}c & d\\ d & c\end{pmatrix}$ alakú mátrixokból álló alteret generálja, ami szintén kétdimenziós (1 pont). Ezért a metszetben I bázis (1 pont). Az összeg dimenziója $2+2-1=3$, bázist alkot például F, T és I (1 pont).