

Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat

Második zárthelyi (2025. május 6.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a pusztá eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjük. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód, valamint hogy a hétfői, keddi vagy pénteki csoportba jár-e. A gyakorlati jegy a két zárthelyi összpontszámának tizennegyed része.

1. Legyen A az a lineáris transzformáció $\mathbb{C}^3$ -ben, mely az $(a, b, c)^T$ vektorhoz a $(a, -c, b)^T$ vektort rendeli. Döntsük el, hogy ez a transzformáció normális-e, unitér-e, önadjungált-e, és határozzuk meg az $\langle (1, i, 1)^T, A((1, i, 1)^T) \rangle$ skaláris szorzat értékét.
2. Határozzuk meg az $4xy + 3y^2$ valós kvadratikus alak karakterét és ONB-ben vett négyzetösszeg alakját.
3. Legyen W az $x - y - 2z = 0$ egyenlettel megadott sík $\mathbb{R}^3$ -ben. Adjunk meg benne egy ortonormált bázist, valamint az $(1, 2, 3)$ pont távolságát W -től.
4. Határozzuk meg az $2 + 2i + j + 2k$ kvaternió négyzetét, inverzét és minimálpolinomját.
5. Számítsuk ki a D_{12} diédercsoportban az $f^2 t f^{-1} t f^9 t$ elem rendjét, valamint az általa generált részcsoporthat indexét (itt f egy $360/12$ fokos forgatás, t pedig tengelyes tükrözés).
6. Hány tizedrendű elem van az A_{12} alternáló csoportban? Nem szükséges számszerű vég-eredményt megadni, elegendő egy (binomiális együtthatókat és faktoriálisokat tartalmazó) képlet is.
7. Tekintsük az összes 5 csúcsú, irányítatlan, egyszerű gráfot. Hány ilyen van, ha az A_5 alternáló csoport elemeivel egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek?
8. Hány eleme van az $R = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 2)$ faktorgyűrűnek (1 pont)? Döntsük el, hogy R test-e (2 pont), és számítsuk ki az $x + (x^2 + 2) \in R$ inverzét (3 pont).