Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat

Első zárthelyi (2025. március 25.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név a NEPTUN-kód és a gyakorlatvezető neve. A dolgozat jegye az összpontszám hatodrésze. Minimumkövetelmény 12 pont, ha nem sikerül, javítót kell írni a félév végén.

1. Legyen $V = \mathbb{R}[x]$ az $\mathbb{R}$ fölött és $W = \langle x^2 - 4, x^2 + 2x - 8, x^2 + x + c\rangle$ a V altere. Mely $c \in \mathbb{R}$ értékekre **nem** tartalmazza W az x^2 polinomot?

2. Legyen V a sík, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér. Egy $C \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció mátrixa a $\big((0,1),(1,1)\big)$ bázisban $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mi C mátrixa az $\big((1,0),(1,2)\big)$ bázisban? Hová viszi C a $(2,3)$ pontot? $(3+3$ pont.)

3. Legyen V a legfeljebb másodfokú **komplex együtthatós** polinomokból és a nullapolinomból álló **komplex** fölötti vektortér, továbbá

a) $W_1 = \{f \in V \,:\, \big(f(0) + f(i)\big)^2 = 0\}$ és

b) $W_2 = \{f \in V \,:\, f(0)^2 + f(i)^2 = 0\}$.

Amelyik nem altér W_1 és W_2 közül, annál igazoljuk ezt (2 pont), amelyik pedig altér (ezt nem kell igazolni), annak adjuk meg a dimenzióját és egy bázisát (4 pont). A dimenzió indoklás nélküli megadása 1 pontot ér.

4. Legyen V a $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortér, továbbá $A, B : V \to \mathbb{Q}$, ahol

a) $A(M)$ az M főátlójában álló számok összege;

b) $B(M)$ az M főátlójában álló számok négyzetösszege.

Amelyik nem lineáris leképezés A és B közül, annál igazoljuk ezt (2 pont), amelyik pedig az (ezt nem kell igazolni), annak adjuk meg a mátrixát (4 pont). A bázis tetszőlegesen választható, de fel kell sorolni az elemeit (a megfelelő sorrendben).

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátaltereit, minimálpolinomját és Jordan-alakját.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Legyen V a sík, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, F, illetve T a síkon az origó körüli $+90$ fokos forgatás, illetve az $y = -x$ egyenesre tükrözés, végül I az identikus transzformáció. Jelölje U az F^k $(1 \le k \le 4)$ transzformációk által generált alteret, W pedig a T és I által generált alteret $\mathrm{Hom}(V,V)$-ben. Adjunk meg egy bázist $U + W$-ben, és egyet $U \cap W$-ben.