Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat

Második zárthelyi (2024. május 14.) — eredmények és pontozás

1. A transzformáció mátrixa a szokásos bázisban

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 pont).}$$

Ez nem önadjungált (1 pont). Mivel MM^* az egységmátrix, ezért A unitér, és így normális is, azaz ONB-ben diagonalizálható ($1+1$ pont). Legyen $v = (1, i, 1)^T$. Az A leképezés definíciója szerint $A(v) = (i, 1, -1)^T$ (1 pont), ezért $\langle v, A(v)\rangle = \overline{1} \cdot i + \overline{i} \cdot 1 + \overline{1} \cdot (-1) = i - i - 1 = -1$ (1 pont).

2. A kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pont), a karakterisztikus polinom $(5-x)(2-x)-4$ (1 pont), a sajátértékek 1 és 6 pozitívak, ezért az alak pozitív definit ($1+1$ pont). A sajátvektorok $(1, -2)^T$ és $(2, 1)^T$ (1 pont), és így a négyzetösszeg alak

$$\Big(\frac{x-2y}{\sqrt{5}}\Big)^2 + 6\Big(\frac{2x+y}{\sqrt{5}}\Big)^2 \qquad \text{(1 pont).}$$

3. Legyen $b_1 = (1/\sqrt{10})(3, 0, 1)$ (1 pont) és $v = (0, 3, 1) \in W$ (1 pont). Ekkor a Gram-Schmidt eljárás képletével b_2 a $(-1, 10, 3)$ normáltja, azaz $1/\sqrt{110}$-szerese (2 pont). A W normálvektora $n = (1/\sqrt{11})(1, 1, -3)$ (1 pont), ezért a keresett távolság $|\langle n, (1, 2, 4)\rangle| = 9/\sqrt{11}$ (1 pont).

4. Tudjuk, hogy α minimálpolinomja $x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha) + N(\alpha)$, jelen esetben $x^2 - 2x + 10$ (2 pont), ezért a kvaternió négyzete $2(1 + i + 2j + 2k) - 10 = -8 + 2i + 4j + 4k$ (2 pont), inverze pedig a konjugáltja elosztva a normájával, ami $(1 - i - 2j - 2k)/10$ (2 pont).

5. Az $f^i t = t f^{-i}$ azonosságot használva az adott elem f^6 (3 pont). Mivel f rendje 16, a hatvány rendjének képletét használva a keresett rend $16/(16, 6) = 8$ (2 pont). Ezért az index $2 \cdot 16/8 = 4$.

6. Negyedrendű elem csak $(abcd)(ef)$ vagy $(abcd)(efgh)$ alakú lehet ($1+1$ pont). Az első típusúak száma $3!\binom{8}{4}\binom{4}{2}$ (2 pont), a második típusúaké $3!\binom{8}{4}3!/2$ (2 pont). (Természetesen ugyanezek a számok más gondolatmenettel, és így más képlettel is kijöhetnek.)

7. Összesen $2^7 = 128$ részgráf van, ezek az identitás fixpontjai (1 pont). Egy nem identikus forgatásnak egy részgráf csak akkor lehet fixpontja, ha mindegyik él be van húzva, vagy ha egyik sincs behúzva, ez 2 lehetőség (2 pont). Tengelyes tükrözésnél a szimmetrikusan elhelyezkedő élek vagy mindketten be vannak húzva, vagy egyik sincs behúzva, ez 2^4 lehetőség (2 pont). Ezért az eredmény $(128 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 16)/14 = 18$ (1 pont).

8. Mivel $x^2 + 2$ másodfokú, a maradékosztályok reprezentánsai az $ax + b$ alakú polinomok, azaz 25 darab (1 pont). Az R test, mert $x^2 + 2$ irreducibilis $\mathbb{Z}_5$ fölött, hiszen másodfokú, és nincs gyöke ebben a testben ($1+1$ pont). Ha $(x+1) + (x^2+2)$ inverze $(ax+b) + (x^2+2)$, akkor szorzatuk $1 + (x^2+2)$. Mivel $x^2 \equiv -2$ (x^2+2), ezért $(x+1)(ax+b) \equiv -2a + bx + ax + b = (a+b)x + (b-2a) = 1$, ahonnan $a + b = 0$ és $b - 2a = 1$, azaz $a = -1/3$, ami $\mathbb{Z}_5$-ben 3, és akkor $b = -3 = 2$. Vagyis a keresett inverz $(3x+2) + (x^2+2)$ (3 pont).