Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat

Első zárthelyi (2024. március 19.) — eredmények és pontozás

1. Akkor, ha $c \neq 0$. A feladat azt kérdezi, hogy ez a három polinom mikor alkot generátorrendszert a legfeljebb másodfokú polinomok alterében. Ez háromdimenziós, ezért benne egy háromelemű vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszer, ha független (idáig 2 pont). A megfelelő egyenletrendszert felírva adódik az eredmény (4 pont). Ehelyett azt is megvizsgálhatjuk, hogy $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & c \end{vmatrix}$, melynek értéke c, mikor nem nulla.

2. A bázistranszformáció képletének alkalmazásához az új bázis elemeit fel kell írni a régi segítségével. Nyilván $(0,1) = 1 \cdot (0,1) + 0 \cdot (1,0)$ és $(1,1) = 1 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$, ezért $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont), ennek inverze $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pont), így a képlet szerint az új mátrix $S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pont). A $(2,1)$ pont képének kiszámításához meg kell határoznunk e pont koordinátáit a régi bázisban (számolhatnánk az új bázisban is). Nyilván $(2,1) = 1 \cdot (0,1) + 2 \cdot (1,0)$. Ezért a $[C(v)] = [C][v]$ képletet a régi bázisban alkalmazva $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, vagyis a $(2,1)$ pont képe $3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0) = (1,3)$ (3 pont).

3. A W_2 nem altér, mert például x és x^2+1 elemei, de az összegük nem (2 pont). A W_1 altér, azokból az $a + bx + cx^2 + dx^3$ polinomokból áll, amelyekre $0 = a - (a + bi - c - di) = -bi + c + di$ (1 pont), és mivel a, b, c, d valós, ez azzal ekvivalens, hogy $c = 0$ és $b = d$ (1 pont). Ezek tehát az $a + b(x + x^3)$ alakú polinomok, bázist alkot pl. 1 és $x^3 + x$ (2 pont).

4. A B nem lineáris, ha $M = E$ az egységmátrix, akkor $B(2E) = 8E$, de $2B(E) = 4E$ (2 pont). Az A lineáris (0 pont), mátrixa a szokásos bázisban

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ (4 pont).}$$

5. A karakterisztikus polinom $x^3(x-2)$ (1 pont), a 0-hoz tartozó sajátaltér a $(0, x, u, 0)^T$ alakú vektorokból áll és kétdimenziós (1 pont), a 2-höz tartozó sajátalteret $(2,1,2,2)^T$ generálja (1 pont). A minimálpolinom $x^2(x-2)$ (2 pont), a Jordan-alakban a 0 sajátértékhez egy 1×1-es és egy 2×2-es blokk tartozik, a 2 sajátértékhez pedig egy 1×1-es (1 pont).

6. Az F, F^2, F^3, F^4 és T mátrixa rendre $(1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $-E$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a szokásos bázisban (1 pont). Az első négy mátrix által generált altér az $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixokból áll, tehát 2 dimenziós (2 pont), az $[I]$ és $[T]$ pedig a $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ alakú mátrixokból álló alteret generálja, ami szintén kétdimenziós (1 pont). Ezért a metszetben I bázis (1 pont). Az összeg dimenziója $2 + 2 - 1 = 3$, bázist alkot például F, T és I (1 pont).