Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat

Második zárthelyi (2024. május 14.)

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód. A gyakorlati jegy a két zárthelyi összpontszámának tizennegyed része.

1. Legyen A az a lineáris transzformáció $\mathbb{C}^3$-ben, mely az $(a,b,c)^T$ vektorhoz a $(b,c,-a)^T$ vektort rendeli. Döntsük el, hogy ez a transzformáció normális-e, unitér-e, önadjungált-e, és határozzuk meg az $\langle (1,i,1)^T, A\big((1,i,1)^T\big)\rangle$ skaláris szorzat értékét.

2. Határozzuk meg az $5x^2+4xy+2y^2$ valós kvadratikus alak karakterét és ONB-ben vett négyzetösszeg alakját.

3. Legyen W az $x+y-3z=0$ egyenlettel megadott sík $\mathbb{R}^3$-ben. Adjunk meg benne egy ortonormált bázist, valamint az $(1,2,4)$ pont távolságát W-től.

4. Határozzuk meg az $1+i+2j+2k$ kvaternió négyzetét, inverzét és minimálpolinomját.

5. Számítsuk ki a D_{16} diédercsoportban az $ftf^{-2}tf^3$ elem rendjét, valamint az általa generált részcsoport indexét (itt f egy 360/16 fokos forgatás, t pedig tengelyes tükrözés).

6. Hány negyedrendű elem van az A_8 alternáló csoportban? Nem szükséges számszerű végeredményt megadni, elegendő egy (binomiális együtthatókat tartalmazó) képlet is.

7. Tekintsük egy 7 hosszú körnek, mint irányítatlan gráfnak azokat a részgráfjait, ahol csúcsot nem hagyunk el. Hány ilyen van, ha a kör 14 szimmetriájával egymásba vihető részgráfokat nem tekintjük különbözőnek?

8. Hány eleme van az $R=\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+2)$ faktorgyűrűnek (1 pont)? Döntsük el, hogy R test-e (2 pont), és számítsuk ki az $x+1+(x^2+2)$ inverzét (3 pont).