**Lineáris és absztrakt algebra, normál gyakorlat**

*Első zárthelyi (2024. március 19.)*

Mindegyik feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Minden feladatot **külön oldalon** kezdjünk. Használni semmilyen segédeszközt nem szabad, kalkulátort, mobiltelefont sem. A ZH alatt nem lehet kimenni a teremből. Minden lapon **OLVASHATÓ NYOMTATOTT NAGYBETŰKKEL** szerepeljen a név és a NEPTUN-kód. A dolgozat jegye az összpontszám hatodrésze.

**1.** Legyen $V = \mathbb{R}[x]$ az $\mathbb{R}$ fölött és $W = \langle x^2 - 1, 3x^2 + x - 4, x^2 - x + c \rangle$ a $V$ altere. Mely $c \in \mathbb{R}$ értékekre tartalmazza $W$ az összes legfeljebb másodfokú polinomot?

**2.** Legyen $V$ a sík, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér. Egy $C \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció mátrixa a $\big((0,1),(1,0)\big)$ bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mi $C$ mátrixa a $\big((0,1),(1,1)\big)$ bázisban? Hová viszi $C$ a $(2,1)$ pontot? $(3+3$ pont.)

**3.** Legyen $V$ az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú polinomjaiból és a nullapolinomból álló valós fölötti vektortér, továbbá

*a)* $W_1 = \{f \in V \,:\, f(0) - f(i) = 0\}$ és
*b)* $W_2 = \{f \in V \,:\, f(0)f(i) = 0\}$.

Amelyik nem altér $W_1$ és $W_2$ közül, annál igazoljuk ezt (2 pont), amelyik pedig altér (ezt nem kell igazolni), annak adjuk meg a dimenzióját és egy bázisát (4 pont). A dimenzió indoklás nélküli megadása 1 pontot ér.

**4.** Legyen $V$ a $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortér, továbbá $A, B : V \to V$, ahol

*a)* $A(M) = 2M + M^T$;
*b)* $B(M) = 2MM^T$.

Amelyik nem lineáris leképezés $A$ és $B$ közül, annál igazoljuk ezt (2 pont), amelyik pedig az (ezt nem kell igazolni), annak adjuk meg a mátrixát (4 pont). A bázis tetszőlegesen választható, de fel kell sorolni az elemeiket (a megfelelő sorrendben).

**5.** Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátaltereit, minimálpolinomját és Jordan-alakját.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**6.** Legyen $V$ a sík, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortér, $F$, illetve $T$ a síkon az origó körüli $+45$ fokos forgatás, illetve az $y = 0$ egyenesre tükrözés, végül $I$ az identikus transzformáció. Jelölje $U$ az $F^k$ $(1 \le k \le 4)$ transzformációk által generált alteret, $W$ pedig a $T$ és $I$ által generált alteret $\mathrm{Hom}(V)$-ben. Adjunk meg egy bázist $U + W$-ben, és egyet $U \cap W$-ben.