

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.

1. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a v_1, \dots, v_n vektorok generátorrendszert alkotnak a T test fölötti V vektortérben. **Mindkét kvantort expliciten írjuk ki a megfogalmazásban.**

Minden $v \in V$ -hez létezik $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$, melyre $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

2. Írjuk föl azt a képletet, amely az $A \in \text{Hom}(V, W)$ és $B \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezések szorzatának mátrixát adja meg, kiírva azt is, hogy mely bázisokban vesszük ezeket a mátrixokat.

Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bázis rendre U, V, W -ben, akkor $[AB]_{\mathbf{c}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

3. Definiáljuk az $A \in \text{Hom}(V)$ leképezés λ -hoz tartozó sajátaltérét **a halmazos jelöléssel.**

$\{v \in V : A(v) = \lambda v\}$.

4. Írjuk föl azt a képletet, amivel a v vektor i -edik koordinátáját a b_1, \dots, b_n **ortonormált** bázisban \mathbb{C} fölött ki lehet számítani.

$\langle b_i, v \rangle$ (fontos a sorrend!)

5. Hogyan kapcsolódik az A lineáris transzformáció m_A minimálpolinomja azokhoz az f polinomokhoz, melyeknek A gyöke?

$f(A) = 0 \iff m_A \mid f$, vagyis ezek az f polinomok a minimálpolinom többszörösei.

6. Legyen A normális transzformáció egy komplex euklideszi téren. Jellemezzük A **sajátértékei segítségével** azt, hogy A mikor unitér. (Az unitér és a normális transzformáció definícióját nem kell leírni.)

Normális transzformáció pontosan akkor unitér, ha minden sajátértéke 1 abszolút értékű.

7. Hány részcsoportja van egy n rendű ciklikus csoportnak?

Az n pozitív osztóinak száma, azaz $d(n)$.

8. Melyek azok a csoportok, amelyeknek pontosan két részcsoportja van?

A prímmrendű ciklikusak.

9. Mit jelent az, hogy a G/N faktorcsoporthban a szorzás jóldefiniált?

Ha $g_1N = h_1N$ és $g_2N = h_2N$, akkor $g_1g_2N = h_1h_2N$.

10. Legyen $f \in \mathbb{Q}[x]$. Mikor lesz a $\mathbb{Q}[x]/(f)$ faktorgyűrű test?

Akkor és csak akkor, ha f irreducibilis \mathbb{Q} fölött.