NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Adjuk meg $\mathbb{C}$ egy részhalmazát, mely valós skalárral szorzásra zárt, de összeadásra nem.

Pl. a valós számok és a tisztán képzetes számok (együtt).

12. Legyenek u, v, w független vektorok egy $\mathbb{Q}$ fölötti vektortérben. Mely vektorok lesznek $\langle u, v\rangle \cap \langle u, w\rangle$ elemei?

λu, $\lambda \in \mathbb{Q}$.

13. Egy vektortér milyen X részhalmazaira igaz, hogy X minimális generátorrendszer $\langle X\rangle$-ben?

Ha X független.

14–15. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben $C(A+B) = CA+CB$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, T, P, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések összegének definíciója.
(T) Leképezés összegtartása.
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\begin{aligned}
\big(C(A+B)\big)(v) &= \quad \boxed{\text{P}}\\
C\big((A+B)(v)\big) &= \quad \boxed{\text{S}}\\
C\big(A(v)+B(v)\big) &= \quad \boxed{\text{T}}\\
C\big(A(v)\big)+C\big(B(v)\big) &= \quad \boxed{\text{P}}\\
(CA)(v)+(CB)(v) &= \quad \boxed{\text{S}}\\
(CA+CB)(v)
\end{aligned}$$

16. Egy 3×3-as valós mátrixnak sajátértéke $1+i$ és 2. Mennyi a determinánsa?

4

17. Ha M és $2M$ hasonlók, akkor mely komplex számok lehetnek sajátértékei M-nek?

Csak a 0.

18. Ha A minimálpolinomja x^2+1 és v tetszőleges vektor, akkor mennyi $A^6(v)$?

$-v$

19. Mennyi $(1,1,1,1)$ és $(1,-1,-1,-1)$ szöge?

    $120°$

20. Melyek azok az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ normális mátrixok, melyeknek $(1,0)^T$ sajátvektora?

    M diagonális.

21. Mely $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mátrixokra teljesül, hogy $M^* = -M^{-1}$?

    Nincs ilyen.

22. Adjunk példát olyan valós mátrixra, amely ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható, de $\mathbb{R}$ fölött nem.

    Pl. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

23. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-en a deriválásnak, mint lineáris leképezésnek egy kétdimenziós invariáns alterét.

    A legfeljebb elsőfokúak.

24. Mi lesz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -1 & -1 \\ c & -1 & 1 \end{pmatrix}$ kvadratikus karaktere?

    Indefinit.

25. Soroljuk fel a kvaterniócsoportban a i által generált részcsoport j szerinti bal oldali mellékosztályának elemeit.

    $j,\ -j,\ k,\ -k$

26. Hány 20-ad rendű eleme van a (200 elemű) D_{100} diédercsoportnak?

    $\varphi(20) = 8$

27. Hány olyan szimmetriája van a kockának, amely fixen hagyja az egyik rögzített lap középpontján átmenő, a lapra merőleges egyenest (a két végpontot szabad megcserélnie)?

    $48/3 = 16$

28. Legyen $N = \langle 3 \rangle \lhd \mathbb{Z}_{40}^{\times}$. Számítsuk ki $7N$ rendjét a $\mathbb{Z}_{40}^{\times}/N$ faktorcsoportban.

    2

29. Hány konjugáltja van az S_5 szimmetrikus csoportban az $(12)(345)$ elemnek?

    $2\binom{5}{2} = 20$

30. Mi lesz $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött?

    $x^4 - 4x^2 + 2$