NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk föl $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ definícióját **a halmazos jelöléssel**, figyelve arra, hogy mik a futó változók, és mik nem.

$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \,:\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T\}$

2. Írjuk föl képlettel, mit jelent az, hogy egy transzformáció tartja a λ skalárral szorzást.

$A(\lambda v) = \lambda A(v)$ minden v vektorra.

3. Legyen $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ és $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ két bázis V-ben, és $S = ((s_{ij}))$ a bázistranszformáció $[A]_{\mathbf{c}/\mathbf{c}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}S$ képletében szereplő mátrix. Írjuk föl az S elemeit megadó összefüggést.

Az S mátrix j-edik oszlopa $[c_j]_{\mathbf{b}}$, azaz $c_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} b_i$.

4. Definiáljuk az A lineáris leképezés rangját (ne a mátrixa segítségével!).

$r(A) = \dim \operatorname{Im}(A)$.

5. Legyen A normális transzformáció egy komplex euklideszi téren. Jellemezzük A **sajátértékei segítségével** azt, hogy A mikor önadjungált. (Az önadjungált és a normális transzformáció definícióját nem kell leírni.)

Normális transzformáció pontosan akkor önadjungált, ha minden sajátértéke valós.

6. Mondjuk ki azt az állítást, amely $A \in \mathrm{Hom}(V)$ esetében kapcsolatot létesít A és A^* invariáns alterei között.

> Ha a W altér A-invariáns, akkor a $W^\perp$ ortogonális kiegészítő altér A^*-invariáns.

7. Adjuk meg ciklus konjugáltjának a képletét.

> $f(a_1 \ldots a_n)f^{-1} = \big(f(a_1) \ldots f(a_n)\big)$.

8. Mikor vannak a b és c csoportelemek ugyanabban a H részcsoport szerinti **bal oldali** mellékosztályban?

> Ha $c^{-1}b \in H$. **Vagy:** van olyan $h \in H$, hogy $bh = c$.

9. Mondjuk ki a G/N faktorcsoport gN elemének rendjére vonatkozó tételt.

> A gN rendje a legkisebb olyan pozitív k, melyre $g^k \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen k.

10. Mondjuk ki a homomorfizmus-tételt gyűrűkre.

> Ha $\varphi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong R/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.