

NÉV: \_\_\_\_\_

ELTE AZONOSÍTÓ: \_\_\_\_\_

**II. rész (60 perc).** Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Adjunk meg egy olyan nem üres részhalmazt  $\mathbb{R}[x]$ -ben, amely zárt a skalárral szorzásra, de nem zárt az összeadásra.

Pl. az elsőfokú polinomok és a nullapolinom.

12. Adjuk meg vektorok egy olyan rendszerét egy vektortérben, amelyek között pontosan két maximális független részrendszer van, és a rangja 2.

Pl.  $\{1, 2, x\} \subseteq \mathbb{R}[x]$ .

13. Mennyi a rangja annak a transzformációnak, amely minden  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ -höz  $M - m_{12}E$ -t rendel?

4

- 14–15. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy  $\text{Hom}(V, W)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy  $\lambda(AB) = A(\lambda B)$  minden  $\lambda \in T$  testelem és  $A, B$  lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, P, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S)  $A$  vagy  $B$  skalárszoros-tartó.

(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(P) Leképezések szorzatának definíciója.

(X) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;  
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;  
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda(AB))(v) = \boxed{\text{L}}$$

$$\lambda((AB)(v)) = \boxed{\text{P}}$$

$$\lambda(A(B(v))) = \boxed{\text{S}}$$

$$A(\lambda(B(v))) = \boxed{\text{L}}$$

$$A((\lambda B)(v)) = \boxed{\text{P}}$$

$$(A(\lambda B))(v)$$

16. Az  $(b_1, b_2) \mapsto (cb_2, b_1)$  bázistranszformáció milyen  $c \in \mathbb{R}$  értékekre olyan tulajdonságú, hogy szimmetrikus mátrixból szimmetrikus mátrixot csinál?

$c = \pm 1$

17. Mely  $d$  számokra lesz  $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  és  $\begin{pmatrix} i & d \\ 0 & i \end{pmatrix}$  hasonló?

$d \neq 0$

18. Egy háromszor hármás mátrix minimálpolinomja  $x^2 - 9$ . Mennyi lehet a determinánusa?

27 vagy  $-27$ .

19. Mely  $z \in \mathbb{C}$ -re lesz  $(i, z)^T \perp (2, i)^T$ ?

2

20. Mely szimmetrikus mátrixoknak lesz  $(1, 1)^T$  és  $(1, 2)^T$  is sajátvektora?

$\lambda E$  ( $E$  az egységmátrix).

21. Az  $M \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  unitér és önadjungált is. Mik a főátlóbeli elemek összegének lehetséges értékei?

$\pm 4, \pm 2, 0$ .

22. Adjunk meg egy olyan valós mátrixot, amelyhez tartozó transzformáció szögtartó, de nem skalárszorzat-tartó.

Pl.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

23. Legyen  $A$  a háromdimenziós tér tükrözése az  $xy$  síkra. Adjuk meg egy olyan kétdimenziós invariáns alterét, amely nem sajátaltér.

Pl. Az  $xz$  sík.

24. Egy szimmetrikus mátrix főátlójában sorban  $-1, 1, -1$  áll. Mi lehet a hozzá tartozó kvadratikus alak jellege?

Indefinit.

25. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban a  $ji$  szorzat által generált részcsoport indexét.

2

26. Hány 9 rendű eleme van a  $\mathbb{Z}_{27}^\times$  csoportnak?

$\varphi(9) = 6$

27. Hány olyan szimmetriája van a kockának, amely az egyik rögzített testátló egyenesét fixen hagyja (a két végpontot szabad megcserélnie)?

$48/4 = 12$

28. Legyen  $N = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \triangleleft S_4$ . Adjunk meg egy olyan  $g \in S_4$  elemet, hogy  $gN$  másodrendű legyen az  $S_4/N$  faktorcsoportban, de különbözzön  $(1234)N$ -től.

Pl.  $g = (13)$ , vagy  $(1243)$

29. Adjunk meg a  $D_4$  diédercsoportban egy olyan részcsoportot, ami nem normálosztó.

Pl.  $\{id, t\}$  (teng. tükr.)

30. Mi lesz  $3 + 4i$  minimálpolinomja  $\mathbb{Q}$  fölött?

$x^2 - 6x + 25$