NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Adjunk meg egy olyan nem üres részhalmazt $\mathbb{R}[x]$-ben, amely zárt a skalárral szorzásra, de nem zárt az összeadásra.

Pl.

12. Adjuk meg vektorok egy olyan rendszerét egy vektortérben, amelyek között pontosan két maximális független részrendszer van, és a rangja 2.

Pl.

13. Mennyi a rangja annak a transzformációnak, amely minden $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$-höz $M - m_{12}E$-t rendel?

14–15. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V, W)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(AB) = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, P, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A vagy B skalárszoros-tartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(X) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(\lambda(AB)\big)(v) = \square$$
$$\lambda\big((AB)(v)\big) = \square$$
$$\lambda\big(A(B(v))\big) = \square$$
$$A\big(\lambda(B(v))\big) = \square$$
$$A\big((\lambda B)(v)\big) = \square$$
$$\big(A(\lambda B)\big)(v)$$

16. Az $(b_1, b_2) \mapsto (cb_2, b_1)$ bázistranszformáció milyen $c \in \mathbb{R}$ értékekre olyan tulajdonságú, hogy szimmetrikus mátrixból szimmetrikus mátrixot csinál?

17. Mely d számokra lesz $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} i & d \\ 0 & i \end{pmatrix}$ hasonló?

18. Egy háromszor hármas mátrix minimálpolinomja $x^2 - 9$. Mennyi lehet a determinánsa?

19. Mely $z \in \mathbb{C}$-re lesz $(i, z)^T \perp (2, i)^T$?

20. Mely szimmetrikus mátrixoknak lesz $(1, 1)^T$ és $(1, 2)^T$ is sajátvektora?

21. Az $M \in \mathbb{C}^{4\times4}$ unitér és önadjungált is. Mik a főátlóbeli elemek összegének lehetséges értékei?

22. Adjunk meg egy olyan valós mátrixot, amelyhez tartozó transzformáció szögtartó, de nem skalárszorzat-tartó.

    Pl.

23. Legyen A a háromdimenziós tér tükrözése az xy síkra. Adjuk meg egy olyan kétdimenziós invariáns alterét, amely nem sajátaltér.

    Pl.

24. Egy szimmetrikus mátrix főátlójában sorban -1, 1, -1 áll. Mi lehet a hozzá tartozó kvadratikus alak jellege?

25. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban a ji szorzat által generált részcsoport indexét.

26. Hány 9 rendű eleme van a $\mathbb{Z}_{27}^{\times}$ csoportnak?

27. Hány olyan szimmetriája van a kockának, amely az egyik rögzített testátló egyenesét fixen hagyja (a két végpontot szabad megcserélnie)?

28. Legyen $N = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \triangleleft S_4$. Adjunk meg egy olyan $g \in S_4$ elemet, hogy gN másodrendű legyen az S_4/N faktorcsoportban, de különbözzön $(1234)N$-től.

    Pl. $g =$

29. Adjunk meg a D_4 diédercsoportban egy olyan részcsoportot, ami nem normálosztó.

    Pl.

30. Mi lesz $3 + 4i$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött?