Mat. I. (BSc.) **LinAbs: 2. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2024. jún. 12.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Definiáljuk, mit jelent az, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok generátorrendszert alkotnak a T test fölötti V vektortérben. **Mindkét kvantort expliciten írjuk ki a megfogalmazásban,** és ne használjuk a generált altér fogalmát.

   Minden $v \in V$-hez **létezik** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, melyre $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

2. Írjuk föl azt a képletet, amivel a v vektor i-edik koordinátáját a $b_1, \ldots, b_n$ **ortonormált** bázisban **komplex fölött,** skaláris szorzás segítségével ki lehet számítani.

   $\langle b_i, v \rangle$ (fontos a sorrend!)

3. Mondjuk ki a lineáris leképezések előírhatósági tételét.

   Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben és $c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges vektorok az ugyanazon test feletti W vektortérben, akkor pontosan egy olyan $A : V \to W$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(b_i) = c_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

4. Mondjuk ki a Cayley–Hamilton-tételt az $n \times n$-es M mátrixra.

   M gyöke a karakterisztikus polinomjának: $k_M(M) = 0$.
   Vagy: M minimálpolinomja osztója a karakterisztikus polinomjának: $m_M \mid k_M$.

5. Hogyan kapcsolódik az A lineáris transzformáció m_A minimálpolinomja azokhoz az f polinomokhoz, melyeknek A gyöke?

   $f(A) = 0 \Longleftrightarrow m_A \mid f$, vagyis ezek az f polinomok a minimálpolinom többszörösei.

6. Mondjuk ki az adjungált transzformációt a skaláris szorzat segítségével jellemző tételt.

Az A és B pontosan akkor adjungáltak, ha minden v, w vektorra $\langle A(v), w\rangle = \langle v, B(w)\rangle$.

7. Mkor vannak a b és c csoportelemek ugyanabban a H részcsoport szerinti bal oldali mellékosztályban?

Ha $c^{-1}b \in H$. **Vagy:** van olyan $h \in H$, hogy $bh = c$.

8. Mondjuk ki a Burnside-lemmát.

Minden csoporthatásnál a pályák száma az elemek fixpontjainak átlagos száma.

9. Jellemezzük **a konjugáltság segítségével,** mikor lesz a G csoport N részcsoportja normálosztó G-ben.

Akkor, ha zárt a konjugálásra, azaz $g \in G$ és $n \in N$ esetén $gng^{-1} \in N$.

10. Legyen $f \in \mathbb{Q}[x]$. Mikor lesz a $\mathbb{Q}[x]/(f)$ faktorgyűrű test?

Akkor és csak akkor, ha f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.