

NÉV: \_\_\_\_\_

ELTE AZONOSÍTÓ: \_\_\_\_\_

**II. rész (60 perc).** Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Adjunk meg  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -ben egy olyan összeadásra zárt halmazt, ami nem altér.

Pl. a valós elemű mátrixok.

12. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha  $\{v_1, v_2, v_3\}$  összefüggő, akkor  $v_1$  vagy  $v_3$  lineárisan függ a másik két vektortól.”

Pl.  $\{x, 0, x^2\}$  az  $\mathbb{R}[x]$ -ben.

13. Álljon  $W$  a  $\text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  azon lineáris transzformációiból, amelyeknek sajátvektora  $(1, 1)^T$ . Mennyi  $\dim W$ ?

3

- 14–15. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy  $\text{Hom}(V, W)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$  minden  $\lambda \in T$  testelem és  $A, B$  lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, T, D, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S)  $A$  vagy  $B$  összegtartó.

(L)  $A$  vagy  $B$  skalárszoros-tartó.

(T) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(D) Leképezések összegének definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;  
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;  
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda(A + B))(v) = \boxed{\text{T}}$$

$$\lambda((A + B)(v)) = \boxed{\text{D}}$$

$$\lambda(A(v) + B(v)) = \boxed{\text{N}}$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(B(v)) = \boxed{\text{T}}$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \boxed{\text{D}}$$

$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

16. Az  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3)$  lineáris transzformáció a  $(2, 1, 0)^T$  és  $(0, 0, 1)^T$  vektorokat kicseréli, a  $(2, 0, 1)^T$  vektort pedig a kétszeresébe viszi. Mik a determinánsának lehetséges értékei?

-2

17. Adjunk meg egy 2 rangú  $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  mátrixot, amely nem diagonalizálható.

$$\text{Pl. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Egy  $3 \times 3$ -as mátrix minimálpolinomja  $x + 2$ . Mi a négyzetének a karakterisztikus polinomja?

$$-(x - 4)^3$$

19. Adjunk ellenpéldát: „a háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha  $u$  és  $v$  lineárisan összefüggő.”

$$\text{Pl. } u = -v \neq 0.$$

20. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „egy  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható  $\mathbb{C}$  fölött ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.”

$$\text{Pl. } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

21. Az  $M$  unitér mátrix minimálpolinomja  $x^n - d$ . Mik a  $d \in \mathbb{C}$  és az  $1 < n \in \mathbb{Z}$  számok lehetséges értékei?

$$n \text{ bármi és } |d| = 1$$

22. Az  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ortogonális mátrix, melynek sajátértéke az  $(1 + i)/\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ . Mennyi lehet a főátlójában álló elemek összege?

$$\sqrt{2} \pm 1$$

23. Mik a térben az  $y$ -tengely körüli 20 fokos forgatás 1- és 2-dimenziós invariáns alterei?

Az  $y$ -tengely 1-dimenziós, az  $xz$ -sík 2-dimenziós.

24. Legyen  $Q(x, y) = bx^2 - 2xy - y^2$ . Mely  $b \in \mathbb{R}$  értékekre lesz  $Q$  negatív definit?

$$b < -1.$$

25. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban az  $ijk$  elemet.

$$-1$$

26. Hány részcsoportja van a  $\mathbb{Z}_9^\times$  csoportnak?

$$d(\varphi(9)) = 4$$

27. Hány pályája van egy szabályos ötszög alapú egyenes hasáb szimmetriacsoportjának az élfelező pontok halmazán?

$$2$$

28. Adjuk meg a  $f^7$  rendjét a  $D_8$  diédercsoport  $\{id, f^4\}$  szerinti faktorcsoportjában.

$$4$$

29. Adjunk meg az  $A_4$  alternáló csoportban egy olyan részcsoportot, ami nem normálosztó.

$$\text{Pl. } \{id, (123), (132)\}$$

30. Mi lesz  $1 + \sqrt[3]{2}$  minimálpolinomja  $\mathbb{Q}$  fölött?

$$(x - 1)^3 - 2$$