NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább* 10 *pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a* 8 *pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Adjunk meg $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben egy olyan összeadásra zárt halmazt, ami nem altér.

12. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ összefüggő, akkor v_1 vagy v_3 lineárisan függ a másik két vektortól.”

13. Álljon W a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ azon lineáris transzformációiból, amelyeknek sajátvektora $(1,1)^T$. Mennyi $\dim W$?

14–15. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V, W)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, T, D, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A vagy B összegtartó.
(L) A vagy B skalárszoros-tartó.
(T) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(D) Leképezések összegének definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(\lambda(A+B)\big)(v) = \quad \square$$
$$\lambda\big((A+B)(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(v)+B(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) = \quad \square$$
$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \quad \square$$
$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

16. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ lineáris transzformáció a $(2,1,0)^T$ és $(0,0,1)^T$ vektorokat kicseréli, a $(2,0,1)^T$ vektort pedig a kétszeresébe viszi. Mik a determinánsának lehetséges értékei?

17. Adjunk meg egy 2 rangú $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrixot, amely nem diagonalizálható.

18. Egy 3×3-as mátrix minimálpolinomja $x+2$. Mi a négyzetének a karakterisztikus polinomja?

19. Adjunk ellenpéldát: „a háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha u és v lineárisan összefüggő."

20. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött ortonormált bázisban, ha szimmetrikus."

21. Az M unitér mátrix minimálpolinomja $x^n - d$. Mik a $d \in \mathbb{C}$ és az $1 < n \in \mathbb{Z}$ számok lehetséges értékei?

22. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrix, melynek sajátértéke az $(1+i)/\sqrt{2} \in \mathbb{C}$. Mennyi lehet a főátlójában álló elemek összege?

23. Mik a térben az y-tengely körüli 20 fokos forgatás 1- és 2-dimenziós invariáns alterei?

24. Legyen $Q(x, y) = bx^2 - 2xy - y^2$. Mely $b \in \mathbb{R}$ értékekre lesz Q negatív definit?

25. Számítsuk ki a kvaterniócsoportban az ijk elemet.

26. Hány részcsoportja van a $\mathbb{Z}_9^\times$ csoportnak?

27. Hány pályája van egy szabályos ötszög alapú egyenes hasáb szimmetriacsoportjának az élfelező pontok halmazán?

28. Adjuk meg a f^7 rendjét a D_8 diédercsoport $\{id, f^4\}$ szerinti faktorcsoportjában.

29. Adjunk meg az A_4 alternáló csoportban egy olyan részcsoportot, ami nem normálosztó.

Pl.

30. Mi lesz $1 + \sqrt[3]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött?