Mat. I. (BSc.) **LinAbs: 1. vizsgadolgozat (normál), I. rész** *2024. máj. 29.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (30 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és a harmadik részt ki sem javítjuk.*

1. Írjuk le képlettel, mit jelent az, hogy a $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ generált altér a **legszűkebb** a $v_1, \ldots, v_n$ vektorokat tartalmazó alterek között. A generált altér elemeit megadó képletet nem kell leírni.

   Minden W altérre $v_1, \ldots, v_n \in W \Rightarrow \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

2. Legyen $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ bázis a V vektortérben és $v \in V$. Definiáljuk a $[v]_\mathbf{b}$ koordinátavektort.

   $[v]_\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ azt jelenti, hogy $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$.

3. Mit jelent az, hogy a Jordan-alak **egyértelmű?** A választ a **hasonlóság** fogalmát felhasználva adjuk meg.

   Két $\mathbb{C}^{n \times n}$-beli mátrix akkor és csak akkor hasonló, ha Jordan-alakjuk a blokkok sorrendjétől eltekintve megegyezik. *Másképp:* Két Jordan-alakú komplex elemű mátrix akkor és csak akkor hasonló, ha legfeljebb csak a blokkok sorrendjében térnek el.

4. Mondjuk ki a főtengelytételt, figyelve arra is, hogy milyen test fölötti mátrixokról beszélünk, és hogy milyen bázisról van szó.

   Egy $n \times n$-es **valós** mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban valós fölött,** ha szimmetrikus, azaz $M^T = M$.

5. Definiáljuk (a Q által felvett értékek segítségével), mit jelent az, hogy a Q kvadratikus alak pozitív szemidefinit. (**Nem** a sajátértékekkel való jellemzés a kérdés!)

   $(\forall v)(Q(v) \geq 0)$ és $(\exists v \neq 0)(Q(v) = 0)$.

6. Ha $b_1, \dots, b_n$ ONB, és az A lineáris transzformáció mátrixa ebben a bázisban M, akkor hogyan írható fel M-ben az i-edik sor j-edik eleme skaláris szorzat segítségével?

$\langle b_i, A(b_j) \rangle$.

7. Adjuk meg ciklus konjugáltjának a képletét.

$f(a_1 \dots a_n) f^{-1} = \big(f(a_1) \dots f(a_n)\big)$.

8. Definiáljuk a $g \in G$ elem $H \leq G$ szerinti bal oldali mellékosztályát, és adjuk meg az elemeit.

$gH = \{gh \,:\, h \in H\}$

9. Mit jelent az, hogy a G/N faktorcsoportban a szorzás jóldefiniált?

Ha $g_1 N = h_1 N$ és $g_2 N = h_2 N$, akkor $g_1 g_2 N = h_1 h_2 N$.

10. Definiáljuk a balideál fogalmát.

I balideál az R gyűrűben, ha az összeadásra részcsoport, és $r \in R$, $b \in I$ esetén $rb \in I$.