NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ______________

II. rész (60 perc). *Minden válaszért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.*

11. Adjuk meg $\mathbb{Q}$ egy részhalmazát, mely összeadásra nem zárt, de egész skalárral szorzásra igen.

Pl. a $p/2$ és a $q/3$ (ahol $p, q \in \mathbb{Z}$) alakban írható számok együttvéve.

12. Adjunk $\mathbb{R}[x]$-ben ellenpéldát a következő állításra: „Egy vektorrendszer független, ha bármely két vektora az."

Pl. $\{1, x, 1+x\}$.

13. Az $\mathbb{R}^5$ egy W **valódi** alterében egy $X \subseteq W$ rendszernek van kételemű független részhalmaza. Mennyi lehet $r(X)$?

2, 3, 4.

14–15. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések szorzata összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, B, P, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:
(A) A összegtartó.
(B) B összegtartó.
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(S) Leképezések összegének definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

$$\left(\textit{Pontozás:}\quad \begin{array}{ll} \text{4 v. 3 helyes válasz:} & \text{2 pont;} \\ \text{2 helyes válasz:} & \text{1 pont;} \\ \text{egyébként:} & \text{0 pont.} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} (AB)(v+w) &= && \boxed{\text{P}} \\ A\big(B(v+w)\big) &= && \boxed{\text{B}} \\ A\big(B(v)+B(w)\big) &= && \boxed{\text{A}} \\ A\big(B(v)\big)+A\big(B(w)\big) &= && \boxed{\text{P}} \\ (AB)(v)+(AB)(w) & \end{aligned}$$

16. Ha $f(x) = x^2 + 2i$ és $v \in \operatorname{Ker}(A)$, akkor mennyi $f(A)(iv)$?

$-2v$

17. Adjunk meg egy 1 rangú $M \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mátrixot, amely nem diagonalizálható.

Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Egy 3×3-as mátrix minimálpolinomja $x^2 + 2x$. Mi lehet a karakterisztikus polinomja?

$-x^3-2x^2$ vagy $-x(x+2)^2$.

19. Mely $z \in \mathbb{C}$ esetén merőleges $(i, 2)$ és $(z, -i)$?

$z = -2.$

20. Adjunk meg egy diagonalizálható, nem normális mátrixot.

Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21. Az M önadjungált mátrix minimálpolinomja $x^n + c$. Mik a $c \in \mathbb{C}$ és az $1 < n \in \mathbb{Z}$ számok lehetséges értékei?

$n = 2$ és $0 > c \in \mathbb{R}$.

22. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrix, melynek egyik sajátértéke $\cos 60° + i \sin 60°$. Mi lehet a minimálpolinomja?

$(x^2 - x + 1)(x \pm 1)$

23. Adjuk meg a térben az $(0, 1, 1)$ és $(1, 0, 0)$ vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

Pl. $(0, 1, -1)$.

24. Egy Q valós kvadratikus alak a $(2, 4)^T$ vektoron a 6 értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel az $(1, 2)^T$ vektoron?

3/2

25. Mennyi lehet $(ab)(cd) \in S_4$ rendje (a, b, c, d nem feltétlenül különbözők)?

1, 2, 3

26. A D_8 diédercsoportban hány kételemű részcsoport van?

9

27. Hány generátoreleme van a $\mathbb{Z}_9^\times$ csoportnak?

$\varphi\big(\varphi(9)\big) = 2$

28. Hány pályája van az $(123)(45)$ elem által generált részcsoportnak S_6-ban?

3

29. Adjuk meg a 10 mellékosztályának rendjét a $\mathbb{Z}_{24}^+ / \{0, 6, 12, 18\}$ faktorcsoportban.

3

30. Mi lesz $1 + \sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött?

$x^2 - 2x - 2$