

NÉV: _____

ELTE AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatóak.

11. Adjuk meg \mathbb{Q} egy részhalmazát, mely összeadásra nem zárt, de egész skalárral szorzásra igen.

12. Adjunk $\mathbb{R}[x]$ -ben ellenpéldát a következő állításra: „Egy vektorrendszer független, ha bármely két vektora az.”

13. Az \mathbb{R}^5 egy W **valódi** alterében egy $X \subseteq W$ rendszernek van kételemű független részhalmaza. Mennyi lehet $r(X)$?

- 14–15. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések szorzata összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, B, P, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(A) A összegtartó.

(B) B összegtartó.

(P) Leképezések szorzatának definíciója.

(S) Leképezések összegének definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont;
2 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(AB)(v + w) = \quad \square$$

$$A(B(v + w)) = \quad \square$$

$$A(B(v) + B(w)) = \quad \square$$

$$A(B(v)) + A(B(w)) = \quad \square$$

$$(AB)(v) + (AB)(w)$$

16. Ha $f(x) = x^2 + 2i$ és $v \in \text{Ker}(A)$, akkor mennyi $f(A)(iv)$?

17. Adjunk meg egy 1 rangú $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mátrixot, amely nem diagonalizálható.

18. Egy 3×3 -as mátrix minimálpolinomja $x^2 + 2x$. Mi lehet a karakterisztikus polinomja?

19. Mely $z \in \mathbb{C}$ esetén merőleges $(i, 2)$ és $(z, -i)$?
20. Adjunk meg egy diagonalizálható, nem normális mátrixot.
21. Az M önadjungált mátrix minimálpolinomja $x^n + c$. Mik a $c \in \mathbb{C}$ és az $1 < n \in \mathbb{Z}$ számok lehetséges értékei?
22. Az $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ortogonális mátrix, melynek egyik sajátértéke $\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$. Mi lehet a minimálpolinomja?
23. Adjuk meg a térben az $(0, 1, 1)$ és $(1, 0, 0)$ vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.
24. Egy Q valós kvadratikus alak a $(2, 4)^T$ vektoron a 6 értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel az $(1, 2)^T$ vektoron?
25. Mennyi lehet $(ab)(cd) \in S_4$ rendje (a, b, c, d) nem feltétlenül különbözők)?
26. A D_8 diédercsoportban hány kételemű részcsoport van?
27. Hány generátoreleme van a \mathbb{Z}_9^\times csoportnak?
28. Hány pályája van az $(123)(45)$ elem által generált részcsoportnak S_6 -ban?
29. Adjuk meg a 10 mellékosztályának rendjét a $\mathbb{Z}_{24}^+ / \{0, 6, 12, 18\}$ faktorcsoportban.
30. Mi lesz $1 + \sqrt{3}$ minimálpolinomja \mathbb{Q} fölött?