1. Mely $b \in \mathbb{R}$ esetén lesz $bx^2 + 2xy - y^2$ negatív definit?

   $b < -1$

2. Legyen $Q(x, y, z) = bx^2 - 2xy - y^2 + yz + z^2$. Mely $b \in \mathbb{R}$ értékekre lesz Q pozitív szemidefinit?

   Nincs ilyen b.

3. Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$ valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz pozitív definit?

   Ha $c > 1$.

4. Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$ valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz indefinit?

   Ha $c < 1$.

5. Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz pozitív szemidefinit (amibe beleértendő, hogy nem pozitív definit)?

   Ha $c = 4$.

6. Adjunk példát olyan c számra, melyre $\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$ kvadratikus karaktere indefinit.

   Pl. $c = 2$.

7. Mi lesz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -1 & -1 \\ c & -1 & 1 \end{pmatrix}$ kvadratikus karaktere?

   Indefinit.

8. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrix minden eleme pozitív, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak pozitív definit vagy pozitív szemidefinit."

   Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrixnak van pozitív és negatív eleme is, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak indefinit."

   Pl. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

10. Egy szimmetrikus mátrix főátlójában sorban -1, 1, -1 áll. Mi lehet a hozzá tartozó kvadratikus alak jellege?

    Indefinit.

11. Egy 2×2-es szimmetrikus mátrix determinánsa -1. Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak karaktere?

    Indefinit.

12. Egy háromváltozós valós kvadratikus alak bal felső sarokdeterminánsainak értéke rendre 1, -1, 1. Mi lehet a jellege?

    Indefinit.

13. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixában a bal felső sarokhoz tartozó négyzetes részmátrixok determinánsai között van nulla, akkor a kvadratikus alak szemidefinit."

    $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

14. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrix determinánsa pozitív, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak pozitív definit.”

Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

15. Mennyi lehet egy olyan 3×3-as valós szimmetrikus mátrix rangja, amelyhez tartozó kvadratikus alak indefinit?

2 vagy 3.

16. Mi lesz $2(x+y)^2+2(y+z)^2-(x-z)^2$ kvadratikus karaktere?

Pozitív szemidefinit.

17. Egy $Q(x, y)$ valós kvadratikus alak négyzetösszeg alakja ortonormált bázisban $Q(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{2}} + ty)^2 + (\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}})^2$. Mik $t \in \mathbb{R}$ lehetséges értékei?

$t = 1/\sqrt{2}$

18. Ha Q kvadratikus alak és $Q(v) = 2$, akkor mennyi $Q(3v)$?

18

19. Egy Q valós kvadratikus alak az $(1, 2)^T$ vektoron a 3 értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel a $(2, 4)^T$ vektoron?

12

20. Egy Q valós kvadratikus alak az $(1, -1)^T$ vektoron a -1 értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel az $(-2, 2)^T$ vektoron?

-4

21. Ha B szimmetrikus bilineáris függvény, melyre $B(u, u) = 1$, $B(v, v) = 2$ és $B(u, v) = 3$, akkor mennyi $B(u+2v, 2u-v)$?

7

22. Keressünk olyan v vektort, hogy a $Q(x, y) = 2xy$ valós kvadratikus alakhoz tartozó B szimmetrikus bilineáris függvénynek $(1, 2)$ és v egy B-ortogonális bázisa legyen.

Pl. $v = (1, -2)$

23. Egy példa megadásával igazoljuk, hogy a kétszer kettes önadjungált mátrixok nem alkotnak alteret $\mathbb{C}$ fölött.

E (az egységmátrix) önadjungált, de iE nem.

24. Adjunk példát, ami cáfolja az alábbi állítást: „az önadjungált mátrixok alteret alkotnak.”

A $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ önadjungált mátrix i-szerese nem önadjungált.

25. Adjuk példát két hasonló mátrixra, melyek sajátalterei nem ugyanazok. Meg kell adni egy sajátértéket, továbbá a hozzá tartozó két különböző sajátalteret is.

Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1-hez tartozó sajátaltere $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, illetve $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.