

1. Mely  $b \in \mathbb{R}$  esetén lesz  $bx^2 + 2xy - y^2$  negatív definit?
2. Legyen  $Q(x, y, z) = bx^2 - 2xy - y^2 + yz + z^2$ . Mely  $b \in \mathbb{R}$  értékekre lesz  $Q$  pozitív szemidefinit?
3. Az  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$  valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz pozitív definit?
4. Az  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$  valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz indefinit?
5. Az  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & c \end{pmatrix}$  valós mátrixhoz tartozó kvadratikus alak mikor lesz pozitív szemidefinit (amibe beleértendő, hogy nem pozitív definit)?
6. Adjunk példát olyan  $c$  számra, melyre  $\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$  kvadratikus karaktere indefinit.
7. Mi lesz  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -1 & -1 \\ c & -1 & 1 \end{pmatrix}$  kvadratikus karaktere?
8. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrix minden eleme pozitív, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak pozitív definit vagy pozitív szemidefinit.”
9. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrixnak van pozitív és negatív eleme is, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak indefinit.”
10. Egy szimmetrikus mátrix főátlójában sorban  $-1, 1, -1$  áll. Mi lehet a hozzá tartozó kvadratikus alak jellege?
11. Egy  $2 \times 2$ -es szimmetrikus mátrix determinánsa  $-1$ . Mi a hozzá tartozó kvadratikus alak karaktere?
12. Egy háromváltozós valós kvadratikus alak bal felső sarokdeterminánsainak értéke rendre  $1, -1, 1$ . Mi lehet a jellege?
13. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixában a bal felső sarokhoz tartozó négyzetes részmátrixok determinánsai között van nulla, akkor a kvadratikus alak szemidefinit.”

14. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy szimmetrikus mátrix determinánsa pozitív, akkor a hozzá tartozó kvadratikus alak pozitív definit.”
15. Mennyi lehet egy olyan  $3 \times 3$ -as valós szimmetrikus mátrix rangja, amelyhez tartozó kvadratikus alak indefinit?
16. Mi lesz  $2(x+y)^2 + 2(y+z)^2 - (x-z)^2$  kvadratikus karaktere?
17. Egy  $Q(x, y)$  valós kvadratikus alak négyzetösszeg alakja ortonormált bázisban  $Q(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{2}} + ty)^2 + (\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}})^2$ . Mik  $t \in \mathbb{R}$  lehetséges értékei?
18. Ha  $Q$  kvadratikus alak és  $Q(v) = 2$ , akkor mennyi  $Q(3v)$ ?
19. Egy  $Q$  valós kvadratikus alak az  $(1, 2)^T$  vektoron a 3 értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel a  $(2, 4)^T$  vektoron?
20. Egy  $Q$  valós kvadratikus alak az  $(1, -1)^T$  vektoron a  $-1$  értéket veszi fel. Milyen értéket vesz fel az  $(-2, 2)^T$  vektoron?
21. Ha  $B$  szimmetrikus bilineáris függvény, melyre  $B(u, u) = 1$ ,  $B(v, v) = 2$  és  $B(u, v) = 3$ , akkor mennyi  $B(u + 2v, 2u - v)$ ?
22. Keressünk olyan  $v$  vektort, hogy a  $Q(x, y) = 2xy$  valós kvadratikus alakhoz tartozó  $B$  szimmetrikus bilineáris függvénynek  $(1, 2)$  és  $v$  egy  $B$ -ortogonális bázisa legyen.
23. Egy példa megadásával igazoljuk, hogy a kétszer kettes önadjungált mátrixok nem alkotnak alteret  $\mathbb{C}$  fölött.
24. Adjunk példát, ami cáfolja az alábbi állítást: „az önadjungált mátrixok alteret alkotnak.”
25. Adjuk példát két hasonló mátrixra, melyek sajátalterei nem ugyanazok. Meg kell adni egy sajátértéket, továbbá a hozzá tartozó két különböző sajátalteret is.