1. Határozzuk meg az $(1,0,1)$ és a $(0,1,1)$ vektorok szögét.

   $60°$.

2. Mennyi $(1,1,1,1)$ és $(1,-1,-1,-1)$ szöge?

   $120°$

3. Mely $z \in \mathbb{C}$ esetén merőleges $(i,1)$ és (z,i)?

   $z = 1$.

4. Mely $z \in \mathbb{C}$-re lesz $(i,z)^T \perp (2,i)^T$?

   2

5. Ha $z \in \mathbb{C}$ abszolút értéke 2, akkor mennyi $\left\|(iz,i,0)^T\right\|$?

   $\sqrt{5}$

6. Adjunk meg egy olyan **egység**vektort $\mathbb{C}^2$-ben, ami merőleges $(i,2)^T \in \mathbb{C}^2$-re.

   $(1/\sqrt{5})(2,i)^T$

7. Adjunk meg egy $(1,2i)$-re merőleges egységvektort.

   $(2/\sqrt{5}, -i/\sqrt{5})$

8. Adjunk meg egy $(3i,2)$-re merőleges 2 hosszú vektort.

   $(4/\sqrt{13}, 6i/\sqrt{13})$

9. Adjunk meg három különböző olyan $z \in \mathbb{C}$ számot, melyre $(i,z)^T \in \mathbb{C}^2$ normája $\sqrt{2}$.

   $1,\ -1,\ i$.

10. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u - iv, 2u - iv\rangle$?

    3

11. Legyenek u és v vektorok egy valós fölötti euklideszi térben. Mikor igaz, hogy $\langle u,v\rangle = \|u\|\,\|v\|$?

    Ha $u = \lambda v$ vagy $v = \lambda u$ alkalmas $\lambda \geq 0$ esetén.

12. Ha $a^2+b^2 = 3$ és $c^2+d^2 = 5$, akkor mi lesz $ac+bd$ maximális értéke? Itt $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

    $\sqrt{15}$

13. Ha $a^2+b^2 = 1$ és $c^2+d^2 = 2$, akkor maximum mennyi lehet $a+bc+d$ értéke?

    $\sqrt{6}$
    $(a = \sqrt{2/3},\ d = \sqrt{3/2})$

14. Ha $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$ és $(a+c)^2+(b+d)^2 = 2$, ahol $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, akkor mennyi lehet $ad - bc$?

    0

15. A $(2a+b+2)^2 = 6(4a^2+b^2+1)$ egyenletet oldjuk meg a valós számok körében.

    $a = 1/4,\ b = 1/2$.

16. A $(4-u+2v)^2 = 6(4+u^2+4v^2)$ egyenlőség mely u,v valós számokra teljesül?

    $u = -1$ és $v = 1/2$

17. Az $(a+2b+1)^2 = 6(a^2+b^2+1)$ egyenletet oldjuk meg a valós számok körében.

    $a = 1,\ b = 2.$

18. $(1+b-c)^2 = 3(1+b^2+c^2)$ mely $b, c \in \mathbb{R}$ számokra teljesül?

    $b = 1$ és $c = -1$

19. Adjunk ellenpéldát: „a háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha u és v lineárisan összefüggő.”

    Pl. $u = -v \neq 0.$

20. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „az u és v vektorokra felírt háromszögegyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha a két vektor párhuzamos.”

    Pl. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$

21. $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{2} = \sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}$ mely $a, b \in \mathbb{R}$ számokra teljesül?

    $a = b \geq 0.$

22. A $\sqrt{a^2+b^2+4} + 3 = \sqrt{(a+2)^2+(b+1)^2+16}$ egyenletet oldjuk meg a valós számok körében.

    $a = 2,\ b = 1.$

23. Mely $d \in \mathbb{C}$ számra lesz $\begin{pmatrix}1 & i\\ i & d\end{pmatrix}$ normális?

    $d = 1.$

24. Az $\begin{pmatrix}a & i\\ i & 0\end{pmatrix}$ mikor diagonalizálható ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött?

    Ha a tisztán képzetes.

25. Az $\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & b\end{pmatrix}$ mikor diagonalizálható ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött?

    Soha.

26. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ c & 1\end{pmatrix}$ ONB-ben diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött. Mik a c szám lehetséges komplex értékei?

    $|c| = 1.$

27. Mely valós r értékekre igaz, hogy $\begin{pmatrix}1 & 1\\ r & 2\end{pmatrix}$ diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött, de nem diagonalizálható ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött?

    $r \notin \{1, -1/4\}$

28. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy valós mátrix komplex fölött diagonalizálható, de valós fölött nem, akkor normális.”

    Pl. $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$

29. Adjunk példát olyan diagonalizálható komplex elemű négyzetes mátrixra, amely ONB-ben nem diagonalizálható.

    Pl. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

30. Adjunk meg egy diagonalizálható, nem normális mátrixot.

    Pl. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

31. Adjunk ellenpéldát az alábbi állítás megfordítására: „normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek.”

    Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

32. Mely $c \in \mathbb{C}$ számokra van olyan M négyzetes komplex elemű mátrix, melyre $M^* = cM^{-1}$?

    $c > 0$ valós.

33. Mely $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mátrixokra teljesül, hogy $M^* = -M^{-1}$?

    Nincs ilyen.

34. Az M valós négyzetes mátrix, melyre $M^* = -2M$. Mi lehet a minimálpolinomja?

    x

35. Ha A normális transzformáció, és minimálpolinomja x^k, akkor mik k lehetséges értékei?

    Csak $k = 1$.

36. Mely $c \in \mathbb{C}$ számokra lesz $x^3 - c$ egy normális mátrix minimálpolinomja?

    $c \neq 0$.

37. Adjunk példát olyan valós mátrixra, ami $\mathbb{C}$ fölött ONB-ben diagonalizálható, és sajátértéke a $2i$.

    Pl. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

38. Melyek azok az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ normális mátrixok, melyeknek $(1, 0)^T$ sajátvektora?

    M diagonális.

39. Melyek azok a 2×2-es valós normális mátrixok, melyeknek sajátvektora az $(1, 0)^T$ és az $(1, 1)^T$ is?

    $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

40. Az A normális transzformáció $(1, 0)^T$-t $(2, 0)^T$-ba viszi, és rangja 1. Adjuk meg $\mathrm{Ker}(A)$ egy nem nulla elemét.

    $(0, 1)^T$

41. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ normális mátrixra $M(1, i)^T = (i, -1)^T$. Mi lesz $M^*(1, i)^T$?

    $(-i, 1)^T$

42. Az M normális mátrixra és a v vektorra $Mv = iv$. Mennyi lesz M^*v?

    $-iv$.

43. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Minden $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ és $v \in \mathbb{C}^2$ esetén $Mv = \lambda v \Rightarrow M^*v = \overline{\lambda}v$.”

    Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

44. Az $\begin{pmatrix} b & c \\ (1/2) & b \end{pmatrix}$ valós mátrix mikor lesz egy távolságtartó transzformáció mátrixa?

    $c = -(1/2)$, $b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

45. Adjunk meg egy olyan valós mátrixot, amelyhez tartozó transzformáció szögtartó, de nem skalárszorzat-tartó.

Pl. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

46. Egy valós egybevágósági transzformáció egyik sajátértéke $(1/3) + ir$. Mik az $r \in \mathbb{R}$ lehetséges értékei?

$\pm 2\sqrt{2}/3$

47. Mely $c \in \mathbb{R}$ számokra lesz $-x^3 + c$ egy ortogonális mátrix karakterisztikus polinomja?

$c = \pm 1$

48. Az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ortogonális mátrix egyik sajátértéke 1. Mik a minimálpolinomjának a lehetséges értékei?

$x - 1$ és $x^2 - 1$.

49. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrix egyik sajátértéke i. Mik a minimálpolinomjának a lehetséges értékei?

$(x^2 + 1)(x \pm 1)$

50. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ egy ortogonális mátrix. Adjunk meg egy olyan számot, ami biztosan sajátértéke M^2-nek.

1

51. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrixnak sajátértéke az $i \in \mathbb{C}$. Mennyi lehet a főátlóban álló elemek összege?

$1, -1$

52. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrix egyik sajátértéke -1. Mik a főátlóbeli elemek összegének lehetséges r értékei?

$-3 \le r \le 1$

53. Mely $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrixokra teljesül, hogy a főátlóban álló elemek összege 3?

Csak az egységmátrixra.

54. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrixnak $(1/2) + i\sqrt{3}/2$ sajátértéke. Mennyi lehet a főátlóbeli elemek összege?

0 vagy 2.

55. Az $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonális mátrix főátlóbeli elemeinek összege -3. Mennyi a determinánsa?

-1.

56. Adjunk meg egy olyan ortogonális mátrixot, melyben a főátlóbeli elemek összege $\sqrt{3} + 1$.

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

57. Adjunk példát olyan ortogonális 2×2-es (valós) mátrixra, melynek főátlójában az elemek összege 1.

Pl. $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$