

1. Határozzuk meg az  $(1, 0, 1)$  és a  $(0, 1, 1)$  vektorok szögét.
2. Mennyi  $(1, 1, 1, 1)$  és  $(1, -1, -1, -1)$  szöge?
3. Mely  $z \in \mathbb{C}$  esetén merőleges  $(i, 1)$  és  $(z, i)$ ?
4. Mely  $z \in \mathbb{C}$ -re lesz  $(i, z)^T \perp (2, i)^T$ ?
5. Ha  $z \in \mathbb{C}$  abszolút értéke 2, akkor mennyi  $\|(iz, i, 0)^T\|$ ?
6. Adjunk meg egy olyan **egységvektort**  $\mathbb{C}^2$ -ben, ami merőleges  $(i, 2)^T \in \mathbb{C}^2$ -re.
7. Adjunk meg egy  $(1, 2i)$ -re merőleges egységvektort.
8. Adjunk meg egy  $(3i, 2)$ -re merőleges 2 hosszú vektort.
9. Adjunk meg három különböző olyan  $z \in \mathbb{C}$  számot, melyre  $(i, z)^T \in \mathbb{C}^2$  normája  $\sqrt{2}$ .
10. Legyenek  $u$  és  $v$  merőleges egységvektorok  $\mathbb{C}$  fölött. Mennyi lesz  $\langle u - iv, 2u - iv \rangle$ ?
11. Legyenek  $u$  és  $v$  vektorok egy valós fölötti euklideszi térben. Mikor igaz, hogy  $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\|$ ?
12. Ha  $a^2 + b^2 = 3$  és  $c^2 + d^2 = 5$ , akkor mi lesz  $ac + bd$  maximális értéke? Itt  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .
13. Ha  $a^2 + b^2 = 1$  és  $c^2 + d^2 = 2$ , akkor maximum mennyi lehet  $a + bc + d$  értéke?
14. Ha  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$  és  $(a + c)^2 + (b + d)^2 = 2$ , ahol  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , akkor mennyi lehet  $ad - bc$ ?
15. A  $(2a + b + 2)^2 = 6(4a^2 + b^2 + 1)$  egyenletet oldjuk meg a valós számok körében.
16. A  $(4 - u + 2v)^2 = 6(4 + u^2 + 4v^2)$  egyenlőség mely  $u, v$  valós számokra teljesül?

17. Az  $(a + 2b + 1)^2 = 6(a^2 + b^2 + 1)$  egyenletet oldjuk meg a valós számok körében.

18.  $(1 + b - c)^2 = 3(1 + b^2 + c^2)$  mely  $b, c \in \mathbb{R}$  számokra teljesül?

19. Adjunk ellenpéldát: „a háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha  $u$  és  $v$  lineárisan összefüggő.”

20. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „az  $u$  és  $v$  vektorokra felírt háromszögegyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha a két vektor párhuzamos.”

Pl.

21.  $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2} = \sqrt{(a + 1)^2 + (b + 1)^2}$  mely  $a, b \in \mathbb{R}$  számokra teljesül?

22. A  $\sqrt{a^2 + b^2 + 4} + 3 = \sqrt{(a + 2)^2 + (b + 1)^2 + 16}$  egyenletet oldjuk meg a valós számok körében.

23. Mely  $d \in \mathbb{C}$  számra lesz  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & d \end{pmatrix}$  normális?

24. Az  $\begin{pmatrix} a & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  mikor diagonalizálható ONB-ben  $\mathbb{C}$  fölött?

25. Az  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$  mikor diagonalizálható ONB-ben  $\mathbb{C}$  fölött?

26.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$  ONB-ben diagonalizálható  $\mathbb{C}$  fölött. Mik a  $c$  szám lehetséges komplex értékei?

27. Mely valós  $r$  értékekre igaz, hogy  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & 2 \end{pmatrix}$  diagonalizálható  $\mathbb{C}$  fölött, de nem diagonalizálható ONB-ben  $\mathbb{C}$  fölött?

28. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy valós mátrix komplex fölött diagonalizálható, de valós fölött nem, akkor normális.”

29. Adjunk példát olyan diagonalizálható komplex elemű négyzetes mátrixra, amely ONB-ben nem diagonalizálható.

Pl.

30. Adjunk meg egy diagonalizálható, nem normális mátrixot.

31. Adjunk ellenpéldát az alábbi állítás megfordítására: „normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek.”

32. Mely  $c \in \mathbb{C}$  számokra van olyan  $M$  négyzetes komplex elemű mátrix, melyre  $M^* = cM^{-1}$ ?

33. Mely  $M \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  mátrixokra teljesül, hogy  $M^* = -M^{-1}$ ?

34. Az  $M$  valós négyzetes mátrix, melyre  $M^* = -2M$ . Mi lehet a minimálpolinomja?

35. Ha  $A$  normális transzformáció, és minimálpolinomja  $x^k$ , akkor mik  $k$  lehetséges értékei?

36. Mely  $c \in \mathbb{C}$  számokra lesz  $x^3 - c$  egy normális mátrix minimálpolinomja?

37. Adjunk példát olyan valós mátrixra, ami  $\mathbb{C}$  fölött ONB-ben diagonalizálható, és sajátértéke a  $2i$ .

38. Melyek azok az  $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  normális mátrixok, melyeknek  $(1, 0)^T$  sajátvektora?

39. Melyek azok a  $2 \times 2$ -es valós normális mátrixok, melyeknek sajátvektora az  $(1, 0)^T$  és az  $(1, 1)^T$  is?

40. Az  $A$  normális transzformáció  $(1, 0)^T$ -t  $(2, 0)^T$ -ba viszi, és rangja 1. Adjuk meg  $\text{Ker}(A)$  egy nem nulla elemét.

41. Az  $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  normális mátrixra  $M(1, i)^T = (i, -1)^T$ . Mi lesz  $M^*(1, i)^T$ ?

42. Az  $M$  normális mátrixra és a  $v$  vektorra  $Mv = iv$ . Mennyi lesz  $M^*v$ ?

43. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Minden  $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  és  $v \in \mathbb{C}^2$  esetén  $Mv = \lambda v \Rightarrow M^*v = \bar{\lambda}v$ .”

44. Az  $\begin{pmatrix} b & c \\ (1/2) & b \end{pmatrix}$  valós mátrix mikor lesz egy távolságtartó transzformáció mátrixa?

45. Adjunk meg egy olyan valós mátrixot, amelyhez tartozó transzformáció szögtartó, de nem skalárszorzat-tartó.

P1.

46. Egy valós egybevágósági transzformáció egyik sajátértéke  $(1/3) + ir$ . Mik az  $r \in \mathbb{R}$  lehetséges értékei?

47. Mely  $c \in \mathbb{R}$  számokra lesz  $-x^3 + c$  egy ortogonális mátrix karakterisztikus polinomja?

48. Az  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ortogonális mátrix egyik sajátértéke 1. Mik a minimálpolinomjának a lehetséges értékei?

49. Az  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ortogonális mátrix egyik sajátértéke  $i$ . Mik a minimálpolinomjának a lehetséges értékei?

50. Az  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  egy ortogonális mátrix. Adjunk meg egy olyan számot, ami biztosan sajátértéke  $M^2$ -nek.

51. Az  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ortogonális mátrixnak sajátértéke az  $i \in \mathbb{C}$ . Mennyi lehet a főátlóban álló elemek összege?

52. Az  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ortogonális mátrix egyik sajátértéke  $-1$ . Mik a főátlóbeli elemek összegének lehetséges  $r$  értékei?

53. Mely  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ortogonális mátrixokra teljesül, hogy a főátlóban álló elemek összege 3?

54. Az  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ortogonális mátrixnak  $(1/2) + i\sqrt{3}/2$  sajátértéke. Mennyi lehet a főátlóbeli elemek összege?

55. Az  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ortogonális mátrix főátlóbeli elemeinek összege  $-3$ . Mennyi a determinánusa?

56. Adjunk meg egy olyan ortogonális mátrixot, melyben a főátlóbeli elemek összege  $\sqrt{3} + 1$ .

57. Adjunk példát olyan ortogonális  $2 \times 2$ -es (valós) mátrixra, melynek főátlójában az elemek összege 1.