

1. Ha $A^2 + A = 2I$, akkor mik A lehetséges sajátértékei? 1 és -2 .
2. Ha M és $2M$ hasonlók, akkor mely komplex számok lehetnek sajátértékei M -nek? Csak a 0.
3. Egy $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mátrix nem diagonalizálható \mathbb{C} fölött, és sajátértéke $1 + i$ és 2 . Mennyi a főátlóbeli elemek összege? 6
4. Adjunk meg egy olyan, valós fölött nem diagonalizálható valós mátrixot, amelynek az i sajátértéke. Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. Az $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix valós fölött diagonalizálható, a főátlójában 1 és 2 áll. Mik $d = \det(M)$ lehetséges értékei? $d \leq 9/4$
6. Az $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ mikor diagonalizálható \mathbb{C} fölött? Ha $a \neq b$.
7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ diagonalizálható \mathbb{C} fölött. Mik a c szám lehetséges komplex értékei? $c \neq 0$.
8. Az A minimálpolinomja $x^3 + 2$. Mennyi $A^9(3v)$? $-24v$
9. Ha A minimálpolinomja $x^2 + 1$ és v tetszőleges vektor, akkor mennyi $A^4(v)$? v
10. Ha az A lineáris leképezés minimálpolinomja $x^2 + 3$, és $A(v) = w$, akkor mi lesz $A(w)$ értéke? $-3v$
11. Ha A minimálpolinomja $x^2 - x + 1$ és v tetszőleges vektor, akkor mennyi $A^3(2v)$? $-2v$
12. Egy 3×3 -as mátrix minimálpolinomja $x^2 + x$. Mi lehet a karakterisztikus polinomja? $-x^3 - x^2$ vagy $-x(x+1)^2$.
13. Egy nem diagonalizálható $\mathbb{C}^{6 \times 6}$ -beli mátrix karakterisztikus polinomja $(x^4 - 1)(x - i)^2$. Mi lehet a minimálpolinomja? $(x^4 - 1)(x - i)^k$, $k = 1, 2$.
14. Egy diagonalizálható $\mathbb{C}^{6 \times 6}$ -beli mátrix karakterisztikus polinomja $(x^2 - 2)^3$. Mi lehet a minimálpolinomja? $x^2 - 2$

15. Egy $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ -beli mátrix minimálpolinomja $x^2 - 1$. Mi lehet a karakterisztikus polinomja?

$$-(x-1)^2(x+1) \text{ vagy } -(x-1)(x+1)^2.$$

16. Egy $M \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ mátrix determinánsa 1, minimálpolinomja $(x+1)^3(x-1)^2$. Mi lehet a karakterisztikus polinomja?

$$(x+1)^4(x-1)^2$$

17. Egy $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -beli **nem** diagonalizálható mátrix sajátértékei 2 és 3. Mi lehet a minimálpolinomja?

$$(x-2)^2(x-3) \text{ vagy } (x-2)(x-3)^2.$$

18. Mely $d \in \mathbb{C}$ értékekre igaz, hogy ha egy mátrix minimálpolinomja $x^2 + ix + d$, akkor a mátrix nem diagonalizálható?

$$d = -1/4$$

19. Egy $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -beli nulla determinánsú mátrixnak az i sajátértéke. Mi lehet a minimálpolinomja?

$$\text{Csak } x(x^2 + 1).$$

20. Egy háromszor hármas mátrix minimálpolinomja $x^2 - 9$. Mennyi lehet a determinánsa?

$$27 \text{ vagy } -27.$$

21. Az $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ minimálpolinomja $(x-3)(x-2)^3$. Mik M determinánsának a lehetséges értékei?

$$48, 72.$$

22. Az $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ minimálpolinomja $(x^2 + 1)^2$. Mik M determinánsának a lehetséges értékei?

$$i, -i.$$

23. Ha az $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3)$ minimálpolinomja $x^3 - 2$, akkor mennyi $\det(A)$?

$$2$$

24. Az $A \in \text{Hom}(\mathbb{C}^4)$ minimálpolinomja $x^3 - x$. Mik $\det(A + E)$ lehetséges értékei?

$$0$$

25. Egy $\mathbb{R}^{6 \times 6}$ -beli mátrix minimálpolinomja $x(x+i+1)(x-i+1)$. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

$$2 \text{ vagy } 4.$$

26. Egy $\mathbb{R}^{6 \times 6}$ -beli mátrix minimálpolinomja $x^4(x^2 + 1)$. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

$$5$$

27. Egy $\mathbb{R}^{5 \times 5}$ -beli mátrix minimálpolinomja x^2 . Mik a rangjának a lehetséges értékei?

$$1 \text{ vagy } 2.$$

28. Az $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ mátrix minimálpolinomja x^5 . Mik M rangjának lehetséges értékei?

$$\text{Csak a } 4.$$

29. Az $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ mátrix minimálpolinomja x^4 . Mik M rangjának lehetséges értékei?

Csak a 3.

30. Az $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ mátrix minimálpolinomja x^3 . Mik M rangjának lehetséges értékei?

2 vagy 3.

31. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha két komplex elemű 4×4 -es mátrix minimálpolinomja egyenlő, akkor a rangjuk is egyenlő.”

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

32. Adjunk meg egy 1 rangú $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mátrixot, melynek minimálpolinomja nem elsőfokú.

$$\text{Pl. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

33. Az $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ minimálpolinomja $x^3 - x^2$. Mik M rangjának a lehetséges értékei?

2, 3, 4.

34. Egy négyzetes mátrix minimálpolinomja $x^6(x-1)^6$. Minimum mennyi a rangja?

11

35. Egy 2×2 -es mátrix minimálpolinomja $x^2 - 2$. Mi az inverzének a minimálpolinomja?

$$x^2 - (1/2)$$

36. Egy 3×3 -as mátrix minimálpolinomja $x - i$. Mi az inverzének a minimálpolinomja?

$$x + i$$

37. Ha az $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^9)$ minimálpolinomja x^7 , akkor mi lehet A^2 minimálpolinomja?

$$x^4$$

38. Az $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3)$ minimálpolinomja $x^3 - 4x$. Mi lesz A^2 minimálpolinomja?

$$x^2 - 4x$$

39. Ha az $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^9)$ minimálpolinomja x^3 , akkor mi lehet $A + I$ minimálpolinomja?

$$(x - 1)^3$$

40. Hány olyan páronként nem hasonló komplex elemű 8×8 -as mátrix van, amelynek a minimálpolinomja x^4 ?

5

41. Hány olyan páronként nem hasonló komplex elemű 9×9 -es mátrix van, amelynek a minimálpolinomja x^3 ?

7

42. Adjunk meg egy olyan komplex elemű négyzetes mátrixot, melynek minimálpolinomja $x^2(x-i)$.

$$\text{Pl. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

43. Adjunk példát olyan $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -beli mátrixra, melynek minimálpolinomja $(x - i)^2$.

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

44. Adjunk meg egy olyan mátrixot, melynek minimálpolinomja $(x - i)^3$, karakterisztikus polinomja $(x - i)^4$.

$$\text{Pl. } \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

45. Egy 3 rangú, nem diagonalizálható $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mátrixnak sajátértéke az $1 - i$. Mi a Jordan-alakja?

$$\begin{pmatrix} 1 - i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

46. Egy 2 rangú, nem diagonalizálható $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mátrixnak sajátértéke az 1. Mi lehet a Jordan-alakja?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

47. Egy 2 rangú $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mátrixnak sajátértéke a $2 + i$. Mi a Jordan-alakja?

$$\begin{pmatrix} 2 + i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

48. Egy 1 rangú, nem diagonalizálható $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mátrixnak mi lehet a Jordan-alakja?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

49. Egy 5×5 -ös szimmetrikus valós mátrix Jordan-alakjában mekkora lehet a legnagyobb Jordan-blokk mérete?

$$1 \times 1$$