

1. Ha  $A^2 + A = 2I$ , akkor mik  $A$  lehetséges sajátértékei?
2. Ha  $M$  és  $2M$  hasonlók, akkor mely komplex számok lehetnek sajátértékei  $M$ -nek?
3. Egy  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  mátrix nem diagonalizálható  $\mathbb{C}$  fölött, és sajátértéke  $1 + i$  és  $2$ . Mennyi a főátlóbeli elemek összege?
4. Adjunk meg egy olyan, valós fölött nem diagonalizálható valós mátrixot, amelynek az  $i$  sajátértéke.
5. Az  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mátrix valós fölött diagonalizálható, a főátlójában  $1$  és  $2$  áll. Mik  $d = \det(M)$  lehetséges értékei?
6. Az  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$  mikor diagonalizálható  $\mathbb{C}$  fölött?
7.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$  diagonalizálható  $\mathbb{C}$  fölött. Mik a  $c$  szám lehetséges komplex értékei?
8. Az  $A$  minimálpolinomja  $x^3 + 2$ . Mennyi  $A^9(3v)$ ?
9. Ha  $A$  minimálpolinomja  $x^2 + 1$  és  $v$  tetszőleges vektor, akkor mennyi  $A^4(v)$ ?
10. Ha az  $A$  lineáris leképezés minimálpolinomja  $x^2 + 3$ , és  $A(v) = w$ , akkor mi lesz  $A(w)$  értéke?
11. Ha  $A$  minimálpolinomja  $x^2 - x + 1$  és  $v$  tetszőleges vektor, akkor mennyi  $A^3(2v)$ ?
12. Egy  $3 \times 3$ -as mátrix minimálpolinomja  $x^2 + x$ . Mi lehet a karakterisztikus polinomja?
13. Egy nem diagonalizálható  $\mathbb{C}^{6 \times 6}$ -beli mátrix karakterisztikus polinomja  $(x^4 - 1)(x - i)^2$ . Mi lehet a minimálpolinomja?
14. Egy diagonalizálható  $\mathbb{C}^{6 \times 6}$ -beli mátrix karakterisztikus polinomja  $(x^2 - 2)^3$ . Mi lehet a minimálpolinomja?

15. Egy  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ -beli mátrix minimálpolinomja  $x^2 - 1$ . Mi lehet a karakterisztikus polinomja?

16. Egy  $M \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  mátrix determinánása 1, minimálpolinomja  $(x + 1)^3(x - 1)^2$ . Mi lehet a karakterisztikus polinomja?

17. Egy  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -beli **nem** diagonalizálható mátrix sajátértékei 2 és 3. Mi lehet a minimálpolinomja?

18. Mely  $d \in \mathbb{C}$  értékekre igaz, hogy ha egy mátrix minimálpolinomja  $x^2 + ix + d$ , akkor a mátrix nem diagonalizálható?

19. Egy  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -beli nulla determinánúsú mátrixnak az  $i$  sajátértéke. Mi lehet a minimálpolinomja?

20. Egy háromszor hármas mátrix minimálpolinomja  $x^2 - 9$ . Mennyi lehet a determinánása?

21. Az  $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  minimálpolinomja  $(x - 3)(x - 2)^3$ . Mik  $M$  determinánásának a lehetséges értékei?

22. Az  $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  minimálpolinomja  $(x^2 + 1)^2$ . Mik  $M$  determinánásának a lehetséges értékei?

23. Ha az  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3)$  minimálpolinomja  $x^3 - 2$ , akkor mennyi  $\det(A)$ ?

24. Az  $A \in \text{Hom}(\mathbb{C}^4)$  minimálpolinomja  $x^3 - x$ . Mik  $\det(A + E)$  lehetséges értékei?

25. Egy  $\mathbb{R}^{6 \times 6}$ -beli mátrix minimálpolinomja  $x(x+i+1)(x-i+1)$ . Mik a rangjának a lehetséges értékei?

26. Egy  $\mathbb{R}^{6 \times 6}$ -beli mátrix minimálpolinomja  $x^4(x^2 + 1)$ . Mik a rangjának a lehetséges értékei?

27. Egy  $\mathbb{R}^{5 \times 5}$ -beli mátrix minimálpolinomja  $x^2$ . Mik a rangjának a lehetséges értékei?

28. Az  $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  mátrix minimálpolinomja  $x^5$ . Mik  $M$  rangjának lehetséges értékei?

29. Az  $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  mátrix minimálpolinomja  $x^4$ . Mik  $M$  rangjának lehetséges értékei?

30. Az  $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  mátrix minimálpolinomja  $x^3$ . Mik  $M$  rangjának lehetséges értékei?

31. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha két komplex elemű  $4 \times 4$ -es mátrix minimálpolinomja egyenlő, akkor a rangjuk is egyenlő.”

32. Adjunk meg egy 1 rangú  $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  mátrixot, melynek minimálpolinomja nem elsőfokú.

33. Az  $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  minimálpolinomja  $x^3 - x^2$ . Mik  $M$  rangjának a lehetséges értékei?

34. Egy négyzetes mátrix minimálpolinomja  $x^6(x-1)^6$ . Minimum mennyi a rangja?

35. Egy  $2 \times 2$ -es mátrix minimálpolinomja  $x^2 - 2$ . Mi az inverzének a minimálpolinomja?

36. Egy  $3 \times 3$ -as mátrix minimálpolinomja  $x - i$ . Mi az inverzének a minimálpolinomja?

37. Ha az  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^9)$  minimálpolinomja  $x^7$ , akkor mi lehet  $A^2$  minimálpolinomja?

38. Az  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3)$  minimálpolinomja  $x^3 - 4x$ . Mi lesz  $A^2$  minimálpolinomja?

39. Ha az  $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^9)$  minimálpolinomja  $x^3$ , akkor mi lehet  $A + I$  minimálpolinomja?

40. Hány olyan páronként nem hasonló komplex elemű  $8 \times 8$ -as mátrix van, amelynek a minimálpolinomja  $x^4$ ?

41. Hány olyan páronként nem hasonló komplex elemű  $9 \times 9$ -es mátrix van, amelynek a minimálpolinomja  $x^3$ ?

42. Adjunk meg egy olyan komplex elemű négyzetes mátrixot, melynek minimálpolinomja  $x^2(x-i)$ .

43. Adjunk példát olyan  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -beli mátrixra, melynek minimálpolinomja  $(x - i)^2$ .

44. Adjunk meg egy olyan mátrixot, melynek minimálpolinomja  $(x - i)^3$ , karakterisztikus polinomja  $(x - i)^4$ .

45. Egy 3 rangú, nem diagonalizálható  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  mátrixnak sajátértéke az  $1 - i$ . Mi a Jordan-alakja?

46. Egy 2 rangú, nem diagonalizálható  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  mátrixnak sajátértéke az 1. Mi lehet a Jordan-alakja?

47. Egy 2 rangú  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  mátrixnak sajátértéke a  $2 + i$ . Mi a Jordan-alakja?

48. Egy 1 rangú, nem diagonalizálható  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  mátrixnak mi lehet a Jordan-alakja?

49. Egy  $5 \times 5$ -ös szimmetrikus valós mátrix Jordan-alakjában mekkora lehet a legnagyobb Jordan-blokk mérete?