1. Az A mátrixa a (b_1, b_2) bázisban $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mi lesz A mátrixa a $(b_1, b_1 + b_2)$ bázisban?

   $\begin{pmatrix} a-c & a+b-c-d \\ c & c+d \end{pmatrix}$

2. Az A mátrixa a (b_1, b_2) bázisban $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mi lesz A mátrixa a $(3b_1, 3b_2)$ bázisban?

   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3. Az A mátrixa a (b_1, b_2) bázisban $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mi lesz A mátrixa a (b_2, b_1) bázisban?

   $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$

4. Az A mátrixa a (b_1, b_2) bázisban $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mi lesz A mátrixa a $(b_1, 2b_2)$ bázisban?

   $\begin{pmatrix} a & 2b \\ c/2 & d \end{pmatrix}$

5. A $(b_1, b_2) \mapsto (cb_2, b_1)$ bázistranszformáció milyen $c \in \mathbb{R}$ értékekre olyan tulajdonságú, hogy szimmetrikus mátrixból szimmetrikus mátrixot csinál?

   $c = \pm 1$

6. A $(b_1, b_2) \mapsto (cb_2, b_1)$ bázistranszformáció milyen $c \in \mathbb{C}$ értékekre olyan tulajdonságú, hogy (komplex) önadjungált mátrixból önadjungált mátrixot csinál?

   $|c| = 1$

7. A $(b_1, b_2) \mapsto (cb_1, b_2)$ bázistranszformáció milyen $c \in \mathbb{R}$ értékekre olyan tulajdonságú, hogy ortogonális mátrixból ortogonális mátrixot csinál?

   $c = \pm 1$

8. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^6)$ és $A^2 = 0$, akkor mik A rangjának lehetséges értékei?

   $0 \le r(A) \le 3.$

9. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^6)$ és A^2 az identitás, akkor mik A rangjának lehetséges értékei?

   6

10. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^6)$ és $r(A) = 2$, akkor mik $\dim \mathrm{Ker}(A^2)$ lehetséges értékei?

    4, 5, 6.

11. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^8)$ és $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A)$, akkor mik A rangjának lehetséges értékei?

    Csak a 4.

12. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^6)$ és $r(A) = 1$, akkor mik $\dim \mathrm{Ker}(A^2)$ lehetséges értékei?

    5 vagy 6.

13. Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ rangja 1, akkor mik $\dim \mathrm{Ker}(A + B)$ lehetséges értékei?

    $2, 3, 4$

14. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^5)$ és $A^3 = 0$, akkor mik $r(A)$ lehetséges értékei?

    0, 1, 2, 3.

15. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^5)$ és $A^3 = E$, akkor mik $r(A)$ lehetséges értékei?

    5

16. Ha A lineáris transzformációja $\mathbb{R}^6$-nak és $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A)$ egydimenziós, akkor mennyi $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Ker}(A)$ dimenziója?

    5

17. Ha A lineáris transzformációja $\mathbb{R}^5$-nek és $A^2 = 0$, akkor mennyi lehet A rangja?

    0, 1, 2

18. Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^9)$, $\dim \mathrm{Ker}(A) = 7$ és $\dim \mathrm{Ker}(B) = 8$, akkor mik $\dim \mathrm{Ker}(A + B)$ lehetséges értékei?

    6, 7, 8

19. Adjunk meg egy bázist $\mathrm{Ker}(X)$-ben, ahol X az előző kérdésben szereplő lineáris leképezés.

    Pl. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

20. Adjunk példát két nem nulla $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra, melyekre $2r(MN) = r(M) + r(N)$.

    Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

21. Adjunk példát két nem nulla $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra, melyekre $1 + r(MN) = r(M) + r(N)$.

    Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22. Adjunk példát két nem nulla $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra, melyekre $2 + r(MN) = r(M + N)$.

    Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Adjunk példát két nem nulla $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra, melyekre $1 + r(MN) = r(M + N)$.

    Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

24. Ha $M \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ rangja 1 és $N \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, akkor mik $r(MN)$ lehetséges értékei?

    0 vagy 1.

25. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^6)$ és $r(A) = 2$, akkor hány különböző sajátértéke lehet A-nak?

    1, 2, 3.

26. Ha $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$-nek a 2 sajátértékhez tartozó sajátaltere egydimenziós, akkor mennyi lehet $r(A - 2I)$?

    3

27. Ha A lineáris leképezés és $A(v) = 2v$, továbbá $f(x) = x^3 - 1$, akkor mennyi $f(A)(-v)$?

    $-7v$

28. Ha A lineáris leképezés, és $A(v) = 3v$, továbbá $f(x) = x^2 + 2$, akkor mennyi $(f(A) + A^2)(2v)$?

    $40v$

29. Ha A lineáris leképezés, v sajátvektor $i \in \mathbb{C}$ sajátértékkel és $f(x) = x^2 - i$, akkor mennyi $(f(A) + iA)(-v)$?

    $(2+i)v$

30. Ha A lineáris leképezés, v sajátvektor -2 sajátértékkel és $f(x) = ix^2 - 2 \in \mathbb{C}[x]$, akkor mennyi $f(A)(3v)$?

    $(12i - 6)v$

31. Ha A lineáris leképezés, v sajátvektor 2 sajátértékkel és $f(x) = x^2 + i \in \mathbb{C}[x]$, akkor mennyi $f(A)(iv)$?

    $(4i - 1)v$

32. Ha $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = x + 1$ és $f(M)(v) = v$, akkor mi lehet M karakterisztikus polinomja?

    $x(x - r)$, $r \in \mathbb{R}$.

33. Legyen v sajátvektora A-nak 4 sajátértékkel és B-nek 3 sajátértékkel. Hová viszi $A + B - AB$ a $-v$ vektort?

    $5v$

34. Legyen v sajátvektora A-nak 2 sajátértékkel és B-nek 3 sajátértékkel. Hová viszi $A + B - 2AB$ a $4v$ vektort?

    $-28v$

35. Legyenek $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ sajátértékei 0, 2 és $f(x) = (x-1)^2$. Mi lesz $f(M)$?

    $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (egységmátrix)

36. Az $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrix egyetlen komplex sajátértéke 4, továbbá $f(x) = (x-4)^2$. Mi lehet $f(M)$?

    $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (nullmátrix)

37. Ha $f(x) = x^2 + x + i$ és v sajátvektora A-nak i sajátértékkel, akkor mennyi $f(A)(-iv)$?

    $(2+i)v$

38. Ha $f(x) = x^2 + i$ és $v \in \mathrm{Ker}(A)$, akkor mennyi $f(A)(iv)$?

    $-v$

39. Ha $f(x) = x^2 + i$, $f(A) = 0$ és $v \in \mathrm{Ker}(A)$, akkor mennyi v?

    0

40. Ha v sajátvektora A-nak i sajátértékkel és B-nek 2 sajátértékkel, továbbá $f(x) = x^2 + i$, akkor mennyi $\big(f(A-B)\big)(v)$?

    $(3 - 3i)v$

41. Ha v sajátvektora A-nak i sajátértékkel, és B-nek 2 sajátértékkel, akkor mennyi $(A + B - AB)(3v)$?

    $(6 - 3i)v$

42. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha két komplex elemű négyzetes mátrix karakterisztikus polinomja egyenlő, akkor a rangjuk is egyenlő.”

    Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

43. Adjunk meg egy olyan mátrixot, melynek rangja 2, karakterisztikus polinomja x^4.

    Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

44. Egy háromszor hármas mátrix sajátértékei 2 és 3. Mennyi lehet a determinánsa?

    12 vagy 18.

45. Egy 3×3-as valós mátrixnak sajátértéke $1 + i$ és 2. Mennyi a determinánsa?

    4

46. Mely d számokra igaz, hogy az $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mátrixhoz önmagán kívül nincs más hasonló mátrix?

    $d = i$

47. Mely d számokra lesz $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} i & d \\ 0 & i \end{pmatrix}$ hasonló?

    $d \neq 0$

48. Mely d számokra lesz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & d \end{pmatrix}$ hasonló?

    $d \neq 1$

49. Mely $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$ szögekre lesz az origó körüli α és β szögű forgatás hasonló?

    $\beta = 2\pi - \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$.

50. Mely $c \in \mathbb{C}$ értékekre lesz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ hasonló?

    Minden c-re.

51. Mely $c \in \mathbb{C}$ értékekre lesz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ c & 3 \end{pmatrix}$ hasonló?

    $c \neq 0$

52. Adjunk példát két hasonló négyzetes mátrixra, amelyek csak egy elemben különböznek.

    Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

53. Adjunk meg egy olyan nem nulla M mátrixot, melyre M és $-M$ hasonlók.

    Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

54. Adjunk meg egy olyan nem nulla M mátrixot, melyre M és $2M$ hasonlók.

    Pl. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

55. Ha M és $2M$ hasonlók, akkor mely komplex számok lehetnek sajátértékei M-nek?

    Csak a 0.

56. Mennyi $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}^n$?

    $\begin{pmatrix} i^n & 0 \\ ni^{n-1} & i^n \end{pmatrix}$