

1–2. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések szorzata összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, B, P, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(A) A összegtartó.

(B) B összegtartó.

(P) Leképezések szorzatának definíciója.

(S) Leképezések összegének definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont;
2 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(AB)(v + w) = \boxed{\text{P}}$$

$$A(B(v + w)) = \boxed{\text{B}}$$

$$A(B(v) + B(w)) = \boxed{\text{A}}$$

$$A(B(v)) + A(B(w)) = \boxed{\text{P}}$$

$$(AB)(v) + (AB)(w)$$

3–4. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezés skalárszorosa összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a O, L, S, K, E betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) A összegtartó.

(L) A skalárszorostartó.

(S) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(K) Leképezések összegének definíciója.

(E) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont;
2 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda A)(v + w) = \boxed{\text{S}}$$

$$\lambda(A(v + w)) = \boxed{\text{O}}$$

$$\lambda(A(v) + A(w)) = \boxed{\text{E}}$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(A(w)) = \boxed{\text{S}}$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda A)(w)$$

5. Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és $X \in \text{Hom}(\mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathbb{R}^2)$ az a lineáris leképezés, mely M -hez $M(1, 2)^T$ -t rendel. Mi lesz X mátrixa a szokásos bázispárban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött, $X : \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ az a lineáris leképezés, melynek mátrixa a szokásos bázisban $(2, 3)$, továbbá $f(x) = (4x, 5x)^T$. Mennyi $X(f)$?

$$23$$

7. Legyen V vektortér \mathbb{R} fölött és $X : \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ az a lineáris leképezés, melynek mátrixa a szokásos bázispárban $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, továbbá $f((x, y)^T) = 5x + 6y$. Mennyi $X(f)$?

$$(17, 39)^T$$

8–9. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések összege skalárszorostartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, L, D, S, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) A , illetve B összegtartó.

(L) A , illetve B skalárszorostartó.

(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(S) Leképezések összegének definíciója.

(X) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont;
2 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(A + B)(\lambda v) = \boxed{S}$$

$$A(\lambda v) + B(\lambda v) = \boxed{L}$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(B(v)) = \boxed{X}$$

$$\lambda(A(v) + B(v)) = \boxed{S}$$

$$\lambda((A + B)(v))$$

10–11. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V, W)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, D, O, A betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A vagy B összegtartó.

(L) A vagy B skalárszorostartó.

(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(A) Vektortéraxióma.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda(A + B))(v) = \boxed{D}$$

$$\lambda((A + B)(v)) = \boxed{O}$$

$$\lambda(A(v) + B(v)) = \boxed{A}$$

$$\lambda(A(v)) + \lambda(B(v)) = \boxed{D}$$

$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \boxed{O}$$

$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

12. Mi \mathbb{R}^3 -ben az origóra való tükrözés kétszeresének determinánusa?

−8

13. Mi az yz -síkra való tükrözés determinánusa?

−1

14. Mennyi a térben egy síkra tükrözés determinánusa?

−1

15. Mennyi a determinánusa \mathbb{R}^3 azon lineáris transzformációjának, amely az xy síkon az origó körül 90° -kal forgat, a z -tengelyt pedig tükrözi az origóra?

−1

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V)$ -ben $(A + B)C = AC + BC$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, P, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) Leképezések összegének definíciója.

(P) Leképezés összegtartása.

(S) Leképezések szorzatának definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$((A + B)C)(v) = \boxed{\text{S}}$$

$$(A + B)(C(v)) = \boxed{\text{O}}$$

$$A(C(v)) + B(C(v)) = \boxed{\text{S}}$$

$$(AC)(v) + (BC)(v) = \boxed{\text{O}}$$

$$(AC + BC)(v)$$

18–19. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V)$ -ben $C(A+B) = CA+CB$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, T, P, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések összegének definíciója.

(T) Leképezés összegtartása.

(P) Leképezések szorzatának definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(C(A + B))(v) = \boxed{\text{P}}$$

$$C((A + B)(v)) = \boxed{\text{S}}$$

$$C(A(v) + B(v)) = \boxed{\text{T}}$$

$$C(A(v)) + C(B(v)) = \boxed{\text{P}}$$

$$(CA)(v) + (CB)(v) = \boxed{\text{S}}$$

$$(CA + CB)(v)$$

20. Mi a z -tengely körüli 50 fokos forgatás determinánusa?

1

21. Mi \mathbb{C}^3 -ben a $v \mapsto iv$ leképezés determinánusa?

$i^3 = -i$

22. Legyen A a transzponálás az $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ vektortéren. Mi ennek a determinánusa?

-1

23. Ha $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ determinánusa $1 + 2i$, akkor mennyi $\det(A^*)$?

$1 - 2i$

24. Egy háromszor hármas mátrix determinánusa 2. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

Csak a 3.

25–26. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a S, A, B, L, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések szorzatának definíciója.

(A) A skalárszoros-tartó.

(B) B skalárszoros-tartó.

(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(N) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$((\lambda A)B)(v) = \boxed{\text{S}}$$

$$(\lambda A)(B(v)) = \boxed{\text{L}}$$

$$\lambda(A(B(v))) = \boxed{\text{A}}$$

$$A(\lambda(B(v))) = \boxed{\text{L}}$$

$$A((\lambda B)(v)) = \boxed{\text{S}}$$

$$(A(\lambda B))(v)$$

27–28. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V, W)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(AB) = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, P, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A vagy B skalárszoros-tartó.

(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(P) Leképezések szorzatának definíciója.

(X) A fentiek közül egyik sem.

(Pontozás: 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(\lambda(AB))(v) = \boxed{\text{L}}$$

$$\lambda((AB)(v)) = \boxed{\text{P}}$$

$$\lambda(A(B(v))) = \boxed{\text{S}}$$

$$A(\lambda(B(v))) = \boxed{\text{L}}$$

$$A((\lambda B)(v)) = \boxed{\text{P}}$$

$$(A(\lambda B))(v)$$

29. Az $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3)$ lineáris transzformáció az $(1, 2, 3)^T$ és $(3, 2, 1)^T$ vektorokat kicseréli, a $(0, 1, 1)^T$ vektort pedig önmagába viszi. Mik a determinánsának lehetséges értékei?

–1

30. Az $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3)$ lineáris transzformáció az $(1, 2, 3)^T$ és $(3, 2, 1)^T$ vektorokat kicseréli, az $(1, 1, 1)^T$ vektort pedig önmagába viszi. Mik a determinánsának lehetséges értékei?

Bármilyen valós szám.