1–2. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések szorzata összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, B, P, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:
(A) A összegtartó.
(B) B összegtartó.
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(S) Leképezések összegének definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

$$\left(\textit{Pontozás:}\quad \begin{array}{ll} \text{4 v. 3 helyes válasz:} & \text{2 pont;} \\ \text{2 helyes válasz:} & \text{1 pont;} \\ \text{egyébként:} & \text{0 pont.} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} (AB)(v+w) &= \quad \square \\ A\big(B(v+w)\big) &= \quad \square \\ A\big(B(v)+B(w)\big) &= \quad \square \\ A\big(B(v)\big)+A\big(B(w)\big) &= \quad \square \\ (AB)(v)+(AB)(w) & \end{aligned}$$

3–4. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezés skalárszorosa összegtartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a O, L, S, K, E betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:
(O) A összegtartó.
(L) A skalárszorostartó.
(S) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(K) Leképezések összegének definíciója.
(E) A fentiek közül egyik sem.

$$\left(\textit{Pontozás:}\quad \begin{array}{ll} \text{4 v. 3 helyes válasz:} & \text{2 pont;} \\ \text{2 helyes válasz:} & \text{1 pont;} \\ \text{egyébként:} & \text{0 pont.} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} (\lambda A)(v+w) &= \quad \square \\ \lambda\big(A(v+w)\big) &= \quad \square \\ \lambda\big(A(v)+A(w)\big) &= \quad \square \\ \lambda\big(A(v)\big)+\lambda\big(A(w)\big) &= \quad \square \\ (\lambda A)(v)+(\lambda A)(w) & \end{aligned}$$

5. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $X \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{R}^2)$ az a lineáris leképezés, mely M-hez $M(1,2)^T$-t rendel. Mi lesz X mátrixa a szokásos bázispárban?

6. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött, $X : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ az a lineáris leképezés, melynek mátrixa a szokásos bázisban $(2,3)$, továbbá $f(x) = (4x, 5x)^T$. Mennyi $X(f)$?

7. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $X : \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris leképezés, melynek mátrixa a szokásos bázispárban $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, továbbá $f\big((x,y)^T\big) = 5x + 6y$. Mennyi $X(f)$?

8–9. A következő levezetésben azt igazoljuk, hogy lineáris leképezések összege skalárszorostartó. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, L, D, S, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) A, illetve B összegtartó.
(L) A, illetve B skalárszorostartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(S) Leképezések összegének definíciója.
(X) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 3 helyes válasz: 2 pont; 2 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$(A+B)(\lambda v) = \quad \square$$
$$A(\lambda v) + B(\lambda v) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(v) + B(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big((A+B)(v)\big)$$

10–11. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V,W)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, D, O, A betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A vagy B összegtartó.
(L) A vagy B skalárszoros-tartó.
(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(O) Leképezések összegének definíciója.
(A) Vektortéraxióma.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(\lambda(A+B)\big)(v) = \quad \square$$
$$\lambda\big((A+B)(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(v) + B(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(v)\big) + \lambda\big(B(v)\big) = \quad \square$$
$$(\lambda A)(v) + (\lambda B)(v) = \quad \square$$
$$(\lambda A + \lambda B)(v)$$

12. Mi $\mathbb{R}^3$-ben az origóra való tükrözés kétszeresének determinánsa?

13. Mi az yz-síkra való tükrözés determinánsa?

14. Mennyi a térben egy síkra tükrözés determinánsa?

15. Mennyi a determinánsa $\mathbb{R}^3$ azon lineáris transzformációjának, amely az xy síkon az origó körül $90°$-kal forgat, a z-tengelyt pedig tükrözi az origóra?

16–17. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben $(A+B)C = AC + BC$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az O, P, S, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(O) Leképezések összegének definíciója.
(P) Leképezés összegtartása.
(S) Leképezések szorzatának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big((A+B)C\big)(v) = \quad \square$$
$$(A+B)\big(C(v)\big) = \quad \square$$
$$A\big(C(v)\big) + B\big(C(v)\big) = \quad \square$$
$$(AC)(v) + (BC)(v) = \quad \square$$
$$(AC+BC)(v)$$

18–19. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben $C(A+B) = CA+CB$ tetszőleges A, B, C esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, T, P, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések összegének definíciója.
(T) Leképezés összegtartása.
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(C(A+B)\big)(v) = \quad \square$$
$$C\big((A+B)(v)\big) = \quad \square$$
$$C\big(A(v) + B(v)\big) = \quad \square$$
$$C\big(A(v)\big) + C\big(B(v)\big) = \quad \square$$
$$(CA)(v) + (CB)(v) = \quad \square$$
$$(CA+CB)(v)$$

20. Mi a z-tengely körüli 50 fokos forgatás determinánsa?

21. Mi $\mathbb{C}^3$-ben a $v \mapsto iv$ leképezés determinánsa?

22. Legyen A a transzponálás az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vektortéren. Mi ennek a determinánsa?

23. Ha $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ determinánsa $1+2i$, akkor mennyi $\det(A^*)$?

24. Egy háromszor hármas mátrix determinánsa 2. Mik a rangjának a lehetséges értékei?

25–26. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe a S, A, B, L, N betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) Leképezések szorzatának definíciója.
(A) A skalárszoros-tartó.
(B) B skalárszoros-tartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(N) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big((\lambda A)B\big)(v) = \quad \square$$
$$(\lambda A)\big(B(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(B(v))\big) = \quad \square$$
$$A\big(\lambda(B(v))\big) = \quad \square$$
$$A\big((\lambda B)(v)\big) = \quad \square$$
$$\big(A(\lambda B)\big)(v)$$

27–28. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\mathrm{Hom}(V, W)$-ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $\lambda(AB) = A(\lambda B)$ minden $\lambda \in T$ testelem és A, B lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, P, X betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A vagy B skalárszoros-tartó.
(L) Leképezés skalárszorosának definíciója.
(P) Leképezések szorzatának definíciója.
(X) A fentiek közül egyik sem.

(*Pontozás:* 4 v. 5 helyes válasz: 2 pont; 2 v. 3 helyes válasz: 1 pont; egyébként: 0 pont.)

$$\big(\lambda(AB)\big)(v) = \quad \square$$
$$\lambda\big((AB)(v)\big) = \quad \square$$
$$\lambda\big(A(B(v))\big) = \quad \square$$
$$A\big(\lambda(B(v))\big) = \quad \square$$
$$A\big((\lambda B)(v)\big) = \quad \square$$
$$\big(A(\lambda B)\big)(v)$$

29. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ lineáris transzformáció az $(1,2,3)^T$ és $(3,2,1)^T$ vektorokat kicseréli, a $(0,1,1)^T$ vektort pedig önmagába viszi. Mik a determinánsának lehetséges értékei?

30. Az $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ lineáris transzformáció az $(1,2,3)^T$ és $(3,2,1)^T$ vektorokat kicseréli, az $(1,1,1)^T$ vektort pedig önmagába viszi. Mik a determinánsának lehetséges értékei?