1. Adjuk meg az összes olyan 2×2-es unitér mátrixot, amelyben 2 darab 1-es szerepel.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Egy unitér mátrix determinánsa $(1/3) + ci$. Mik a valós c szám lehetséges értékei?

$\pm 2\sqrt{2}/3$

3. Ha A unitér, akkor mik $\det(AA^*)$ lehetséges értékei?

1

4. Mely unitér mátrixoknak sajátvektora az $(1,0)^T$?

$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$, $|z| = |w| = 1.$

5. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „minden normális mátrix egy önadjungált mátrix komplex számszorosa."

Pl. $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Mely $z \in \mathbb{C}$ értékekre lehet $x^2 - (z+1)x + z$ egy önadjungált mátrix minimálpolinomja?

$z \neq 1$, z valós.

7. Az M önadjungált mátrix minimálpolinomja $(x^2 - 1)^k$. Mik a k szám lehetséges értékei?

$k = 1$

8. Az M önadjungált mátrix minimálpolinomja $x^n - c$. Mik a $c \in \mathbb{C}$ és az $1 < n \in \mathbb{Z}$ számok lehetséges értékei?

$n = 2$ és $0 < c \in \mathbb{R}$.

9. Az $M \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ unitér és önadjungált is. Mik a főátlóbeli elemek összegének lehetséges értékei?

± 4, ± 2, 0.

10. Tegyük föl, hogy A önadjungált és invertálható, B unitér. Mivel egyenlő $B(AB)^*(BA)^{-1}$?

$B^{-1} = B^*$.

11. Bontsuk föl a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ mátrixot egy önadjungált és egy unitér mátrix szorzatára.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

12. Adjunk példát olyan **normális** valós mátrixra, ami nem diagonalizálható valós fölött ONB-ben.

Pl. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. Adjunk példát olyan valós mátrixra, amely ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható, de $\mathbb{R}$ fölött nem.

Pl. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.”

   Pl. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Adjunk példát olyan valós fölött diagonalizálható valós mátrixra, ami nem diagonalizálható valós fölött ONB-ben.

   Pl. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

16. Egy 5×5-ös szimmetrikus valós mátrix Jordan-alakjában mekkora lehet a legnagyobb Jordan-blokk mérete?

   1×1

17. Egy valós szimmetrikus M mátrix sajátértékei 1 abszolút értékűek. Mik M^2 lehetséges értékei?

   Csak E.

18. Mely $c \in \mathbb{R}$ értékekre lehet $x^2 + cx + 3$ egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja?

   $c^2 \geq 12$

19. Mely szimmetrikus mátrixoknak lesz $(1,1)^T$ és $(1,2)^T$ is sajátvektora?

   λE (E az egységmátrix).

20. Az $\left\langle (1,0,0)^T \right\rangle \oplus \left\langle (1,1,1)^T, (1,2,b)^T \right\rangle = \mathbb{R}^3$ összefüggés milyen $b \in \mathbb{R}^3$ számokra teljesül?

   $b \neq 2$

21. Milyen feltételeknek kell teljesülnie az a, b, c számokra, hogy $\left\langle (1,0,0)^T, (0,1,0)^T \right\rangle \oplus \left\langle (a,b,c)^T \right\rangle = \mathbb{R}^3$ teljesüljön?

   $c \neq 0$

22. Az $\mathbb{R}^6$-ban az U, V, W alterek közül bármely kettő egymásnak direkt kiegészítője. Mennyi lehet $\dim(U)$?

   3

23. A tér origón átmenő S síkjának $\langle (1,0,0) \rangle$ és $\langle (0,1,0) \rangle$ is direkt kiegészítő altere. Hány olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ lehet, amelyre $\langle (1,\lambda,0) \rangle$ nem direkt kiegészítő altere S-nek?

   1

24. Legyen $W = \{f \in V : f(1) = 0\}$, ahol V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb századfokú polinomjaiból és a nullapolinomból álló $\mathbb{R}$ fölötti vektortér. Mely $u \in \mathbb{R}$ számokra teljesül, hogy $V = W \oplus \langle x^2 + ux + 2u \rangle$?

   $u \neq -1/3$

25. Milyen feltételnek kell teljesülnie az a, b, c számokra, hogy $\left\langle (a,b,c)^T \right\rangle$ direkt kiegészítő altere legyen az $x + 2y + 3z = 0$ egyenletű síknak?

   $a + 2b + 3c \neq 0$

26. Milyen feltételnek kell teljesülnie a b, c számokra, hogy az $x + 2y + 3z = 0$ egyenletű síknak $\left\langle (5,b,c)^T \right\rangle$ ortogonális kiegészítő altere legyen?

   $b = 10$ és $c = 15$.

27. Adjuk meg az $(1,1,0)^T \in \mathbb{R}^3$ által generált altér ortogonális kiegészítő alterének a dimenzióját.

   2

28. Legyen $W = \left\langle (1, i, -i)^T, (-i, 1, -1)^T \right\rangle \leq \mathbb{C}^3$. Mennyi $W^\perp$ dimenziója?

    2

29. Adjuk meg a térben az $(1, 0, 1)$ és $(0, 1, 0)$ vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

    Pl. $(1, 0, -1)$.

30. Adjuk meg a térben az $(1, 1, -1)$ és $(1, -1, 1)$ vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

    Pl. $(0, 1, 1)$.

31. A tér origón átmenő S síkjának $\langle (1, 0, 0) \rangle$ és $\langle (0, 1, 0) \rangle$ sem direkt kiegészítő altere. Mi S ortogonális kiegészítő altere?

    $\langle (0, 0, 1) \rangle$

32. Adjuk meg $\mathbb{C}^2$-ben az $\left\langle (1, i)^T \right\rangle$ ortogonális kiegészítő alterének egy generátorelemét.

    Pl. $(1, -i)^T$

33. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$-ben az $(1, 0, i)$ és $(1, i, 0)$ vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

    Pl. $(i, 1, 1)$.

34. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$-ben az $(i, 1, 0)$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

    Pl. $(i, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

35. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$-ben az $(1, 0, i)$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

    Pl. $(i, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$.

36. Hány invariáns altere van a sík egy origón átmenő egyenesre való tükrözésének?

    4

37. Hány egydimenziós invariáns altere van egy origón átmenő egyenesre tükrözésnek a síkon?

    2

38. Adjunk meg egy olyan lineáris transzformációt a síkon, aminek csak a két triviális invariáns altere van.

    Pl. forgatás 73 fokkal az origó körül.

39. Adjuk meg a síkon az $y = x$ egyenesre való függőleges vetítés egydimenziós invariáns altereit.

    Az $y = x$ egyenes és az y-tengely.

40. Hány egydimenziós invariáns altere lehet a térben egy síkra tükrözésnek?

    Végtelen sok.

41. Legyen T a térben a $z = 0$ egyenletű S síkra való tükrözés. Adjuk meg T-nek egy olyan kétdimenziós invariáns alterét, ami nem az S.

    Pl. az $y = 0$ sík.

42. Legyen A a háromdimenziós tér tükrözése az xy síkra. Adjuk meg egy olyan kétdimenziós invariáns alterét, amely nem sajátaltér.

    Pl. Az xz sík.

43. Mik a térben a z-tengely körüli 60 fokos forgatás 1- és 2-dimenziós invariáns alterei?

> A z-tengely 1-dimenziós, az xy-sík 2-dimenziós.

44. Adjuk meg a térben a z-tengely körüli 40°-os forgatás egy olyan invariáns alterét, ami nem csak sajátvektorokból áll.

> A $z = 0$ sík.

45. Adjunk meg $\mathbb{R}[x]$-en a deriválásnak, mint lineáris leképezésnek egy kétdimenziós invariáns alterét.

> A legfeljebb elsőfokúak.

46. Adjunk meg $\mathbb{R}^{2\times 2}$-n a transzponálásnak, mint lineáris leképezésnek egy kétdimenziós invariáns alterét.

> Pl. a diagonális mátrixok.

47. Adjuk meg $\mathbb{R}^{2\times 2}$-n az $A(M) = -M^T$ lineáris leképezésnek egy háromdimenziós invariáns alterét.

> Pl. a szimmetrikus mátrixok.

48. Adjuk meg $\mathbb{R}^{2\times 2}$-n az $A(M) = -M^T$ lineáris leképezésnek egy egydimenziós invariáns alterét.

> Pl. a λE alakú mátrixok ($\lambda \in \mathbb{R}$).

49. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha W egy A-invariáns altér, akkor W minden altere is A-invariáns.”

> Pl. A a 90 fokos forgatás a síkon, W az egész sík.

50. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha W egy A-invariáns altér, akkor $W^\perp$ is A-invariáns.”

> Pl. A mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, a két sajátaltér nem merőleges (ez egy nem merőleges vetítés).

51. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha W egy A-invariáns altér, akkor W invariáns A^*-ra is.” A transzformációt és az alteret is meg kell adni.

> Pl. A mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, az x-tengely A-invariáns, de nem A^*-invariáns.

52. A térben az xy sík A-invariáns. Adjuk meg A^* egy sajátvektorát.

> Pl. $(0, 0, 1)$.

53. A térben $(0, 1, 0)$ sajátvektora A-nak. Adjuk meg A^* egy kétdimenziós invariáns alterét.

> Az xz-sík.