

1. Adjuk meg az összes olyan  $2 \times 2$ -es unitér mátrixot, amelyben 2 darab 1-es szerepel.

2. Egy unitér mátrix determinánsa  $(1/3) + ci$ . Mik a valós  $c$  szám lehetséges értékei?

3. Ha  $A$  unitér, akkor mik  $\det(AA^*)$  lehetséges értékei?

4. Mely unitér mátrixoknak sajátvektora az  $(1, 0)^T$ ?

5. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „minden normális mátrix egy önadjungált mátrix komplex számszorosa.”

6. Mely  $z \in \mathbb{C}$  értékekre lehet  $x^2 - (z+1)x + z$  egy önadjungált mátrix minimálpolinomja?

7. Az  $M$  önadjungált mátrix minimálpolinomja  $(x^2 - 1)^k$ . Mik a  $k$  szám lehetséges értékei?

8. Az  $M$  önadjungált mátrix minimálpolinomja  $x^n - c$ . Mik a  $c \in \mathbb{C}$  és az  $1 < n \in \mathbb{Z}$  számok lehetséges értékei?

9. Az  $M \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  unitér és önadjungált is. Mik a főátlóbeli elemek összegének lehetséges értékei?

10. Tegyük föl, hogy  $A$  önadjungált és invertálható,  $B$  unitér. Mivel egyenlő  $B(AB)^*(BA)^{-1}$ ?

11. Bontsuk föl a  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$  mátrixot egy önadjungált és egy unitér mátrix szorzatára.

12. Adjunk példát olyan **normális** valós mátrixra, ami nem diagonalizálható valós fölött ONB-ben.

 Pl.

13. Adjunk példát olyan valós mátrixra, amely ONB-ben  $\mathbb{C}$  fölött diagonalizálható, de  $\mathbb{R}$  fölött nem.

 Pl.

14. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „egy  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható  $\mathbb{C}$  fölött ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.”
15. Adjunk példát olyan valós fölött diagonalizálható valós mátrixra, ami nem diagonalizálható valós fölött ONB-ben.
16. Egy  $5 \times 5$ -ös szimmetrikus valós mátrix Jordan-alakjában mekkora lehet a legnagyobb Jordan-blokk mérete?
17. Egy valós szimmetrikus  $M$  mátrix sajátértékei 1 abszolút értékűek. Mik  $M^2$  lehetséges értékei?
18. Mely  $c \in \mathbb{R}$  értékekre lehet  $x^2 + cx + 3$  egy szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomja?
19. Mely szimmetrikus mátrixoknak lesz  $(1, 1)^T$  és  $(1, 2)^T$  is sajátvektora?
20. Az  $\langle (1, 0, 0)^T \rangle \oplus \langle (1, 1, 1)^T, (1, 2, b)^T \rangle = \mathbb{R}^3$  összefüggés milyen  $b \in \mathbb{R}^3$  számokra teljesül?
21. Milyen feltételeknek kell teljesülnie az  $a, b, c$  számokra, hogy  $\langle (1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T \rangle \oplus \langle (a, b, c)^T \rangle = \mathbb{R}^3$  teljesüljön?
22. Az  $\mathbb{R}^6$ -ban az  $U, V, W$  alterek közül bármely kettő egymásnak direkt kiegészítője. Mennyi lehet  $\dim(U)$ ?
23. A tér origón átmenő  $S$  síkjának  $\langle (1, 0, 0) \rangle$  és  $\langle (0, 1, 0) \rangle$  is direkt kiegészítő altere. Hány olyan  $\lambda \in \mathbb{R}$  lehet, amelyre  $\langle (1, \lambda, 0) \rangle$  nem direkt kiegészítő altere  $S$ -nek?
24. Legyen  $W = \{f \in V : f(1) = 0\}$ , ahol  $V$  az  $\mathbb{R}[x]$  legfeljebb századfokú polinomjaiból és a nullapolinomból álló  $\mathbb{R}$  fölötti vektortér. Mely  $u \in \mathbb{R}$  számokra teljesül, hogy  $V = W \oplus \langle x^2 + ux + 2u \rangle$ ?
25. Milyen feltételnek kell teljesülnie az  $a, b, c$  számokra, hogy  $\langle (a, b, c)^T \rangle$  direkt kiegészítő altere legyen az  $x + 2y + 3z = 0$  egyenletű síknak?
26. Milyen feltételnek kell teljesülnie a  $b, c$  számokra, hogy az  $x + 2y + 3z = 0$  egyenletű síknak  $\langle (5, b, c)^T \rangle$  ortogonális kiegészítő altere legyen?
27. Adjuk meg az  $(1, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$  által generált altér ortogonális kiegészítő alterének a dimenzióját.

Pl.

Pl.

28. Legyen  $W = \langle (1, i, -i)^T, (-i, 1, -1)^T \rangle \leq \mathbb{C}^3$ . Mennyi  $W^\perp$  dimenziója?
29. Adjuk meg a térben az  $(1, 0, 1)$  és  $(0, 1, 0)$  vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.
30. Adjuk meg a térben az  $(1, 1, -1)$  és  $(1, -1, 1)$  vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.
31. A tér origón átmenő  $S$  síkjának  $\langle (1, 0, 0) \rangle$  és  $\langle (0, 1, 0) \rangle$  sem direkt kiegészítő altere. Mi  $S$  ortogonális kiegészítő altere?
32. Adjuk meg  $\mathbb{C}^2$ -ben az  $\langle (1, i)^T \rangle$  ortogonális kiegészítő alterének egy generátorelemét.
33. Adjuk meg  $\mathbb{C}^3$ -ben az  $(1, 0, i)$  és  $(1, i, 0)$  vektorok által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.
34. Adjuk meg  $\mathbb{C}^3$ -ben az  $(i, 1, 0)$  vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.
35. Adjuk meg  $\mathbb{C}^3$ -ben az  $(1, 0, i)$  vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.
36. Hány invariáns altere van a sík egy origón átmenő egyenesre való tükrözésének?
37. Hány egydimenziós invariáns altere van egy origón átmenő egyenesre tükrözésnek a síkon?
38. Adjunk meg egy olyan lineáris transzformációt a síkon, aminek csak a két triviális invariáns altere van.
39. Adjuk meg a síkon az  $y = x$  egyenesre való függőleges vetítés egydimenziós invariáns altereit.
40. Hány egydimenziós invariáns altere lehet a térben egy síkra tükrözésnek?
41. Legyen  $T$  a térben a  $z = 0$  egyenletű  $S$  síkra való tükrözés. Adjuk meg  $T$ -nek egy olyan kétdimenziós invariáns alterét, ami nem az  $S$ .
42. Legyen  $A$  a háromdimenziós tér tükrözése az  $xy$  síkra. Adjuk meg egy olyan kétdimenziós invariáns alterét, amely nem sajátaltér.

43. Mik a térben a  $z$ -tengely körüli 60 fokos forgatás 1- és 2-dimenziós invariáns alterei?

44. Adjuk meg a térben a  $z$ -tengely körüli  $40^\circ$ -os forgatás egy olyan invariáns alterét, ami nem csak sajátvektorokból áll.

45. Adjunk meg  $\mathbb{R}[x]$ -en a deriválásnak, mint lineáris leképezésnek egy kétdimenziós invariáns alterét.

46. Adjunk meg  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -n a transzponálásnak, mint lineáris leképezésnek egy kétdimenziós invariáns alterét.

47. Adjuk meg  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -n az  $A(M) = -M^T$  lineáris leképezésnek egy háromdimenziós invariáns alterét.

48. Adjuk meg  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -n az  $A(M) = -M^T$  lineáris leképezésnek egy egydimenziós invariáns alterét.

49. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha  $W$  egy  $A$ -invariáns altér, akkor  $W$  minden altere is  $A$ -invariáns.”

50. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha  $W$  egy  $A$ -invariáns altér, akkor  $W^\perp$  is  $A$ -invariáns.”

51. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „ha  $W$  egy  $A$ -invariáns altér, akkor  $W$  invariáns  $A^*$ -ra is.” A transzformációt és az alteret is meg kell adni.

52. A térben az  $xy$  sík  $A$ -invariáns. Adjuk meg  $A^*$  egy sajátvektorát.

53. A térben  $(0, 1, 0)$  sajátvektora  $A$ -nak. Adjuk meg  $A^*$  egy kétdimenziós invariáns alterét.