1. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „mindegyik vektortéraxiómában, amelyben szerepel skalárral szorzás, szerepel összeadás is”.

   Pl. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.

2. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „mindegyik vektortéraxiómában, amelyben szerepel összeadás, szerepel skalárral szorzás is”.

   Pl. $v + w = w + v$.

3. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „mindegyik vektortéraxiómában, amelyben szerepel összeadás, nem szerepel skalárral szorzás”.

   Pl. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$.

4. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: „Ha egy vektortéraxiómában, nem szerepel összeadás, akkor nem szerepel skalárral szorzás sem”.

   Pl. $1 \cdot v = v$.

5. Módosítsuk $\mathbb{R}[x]$-ben mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást úgy, hogy az $f(x) \in \mathbb{R}[x]$-nek a $\lambda \in \mathbb{R}$-rel vett szorzata $f(\lambda x)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

   Pl. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda = \mu = 1$, $f(x) = x^2$ (mert $\big((1 + 1)x\big)^2 \neq (1 \cdot x)^2 + (1 \cdot x)^2$).

6. Módosítsuk $\mathbb{R}[x]$-ben mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást úgy, hogy az $f(x) \in \mathbb{R}[x]$-nek a $\lambda \in \mathbb{R}$-rel vett szorzata $|\lambda|\, f(x)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

   Pl. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $f(x) = x$ (mert $|1 + (-1)|\, x \neq (|1| + |-1|)x$).

7. Módosítsuk $\mathbb{R}[x]$-ben mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást úgy, hogy az $f(x) \in \mathbb{R}[x]$-nek a $\lambda \in \mathbb{R}$-rel vett szorzata $2\lambda f(x)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

   Pl. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$; $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $v = x$, vagy $1 \cdot v = v$; $v = x$.

8. Módosítsuk $\mathbb{R}[x]$-ben mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást úgy, hogy az $f(x) \in \mathbb{R}[x]$-nek a $\lambda \in \mathbb{R}$-rel vett szorzata $\lambda f(0)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

   Pl. $1 \cdot v = v$; $v = x$, mert $0 \neq x$.

9. Legyen $V = \mathbb{Z}$ a szokásos összeadásra, $T = \mathbb{Z}_2$ és $v \in V$, $\lambda \in T$ esetén $\lambda v = v$, ha $\lambda = 1$ és 0, ha $\lambda = 0$. Adjunk meg egy nem teljesülő vektortéraxiómát, és a helyettesítést ami ezt mutatja.

   Pl. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda = \mu = 1$, $v = 1$ (mert $\mathbb{Z}_2$-ben $1 + 1 = 0$).

10. Legyen V a nemnegatív valós számok halmaza a szokásos összeadásra. A v vektort a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral úgy szorozzuk, hogy az eredmény a két szám szorzatának abszolút értéke legyen. Adjunk meg az utolsó négy, skalárokat is tartalmazó vektortéraxióma közül egy olyat, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

    Pl. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $v = 1$.

11. Legyen V a valós számok halmaza a szokásos összeadásra. A v vektort a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral úgy szorozzuk, hogy az eredmény λv^2 legyen. Adjunk meg egy olyan vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

   Pl. $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$, $\lambda = 1$, $v = w = 1$.

12. Legyen V a valós számok halmaza a szokásos összeadásra. A v vektort a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral úgy szorozzuk, hogy az eredmény $\lambda^2 v$ legyen. Adjunk meg egy olyan vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

   $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda = \mu = 1$, $v = 1$.

13. Módosítsuk a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $(\forall\lambda)(\forall v)\lambda v = (0,1)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

   Pl. $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda = \mu = 1$, $v \neq 0$ tetszőleges.

14. Módosítsuk a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $(\forall\lambda)(\forall v)\lambda v = (0,0)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

   $1 \cdot v = v$, $v \neq 0$ tetszőleges.

15. Módosítsuk a síkon mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $\lambda(a,b) = (|\lambda|\, a, |\lambda|\, b)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

   $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $v \neq 0$ tetszőleges.

16. Módosítsuk a síkon mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást így: $\lambda(a,b) = (\lambda\,|a|\,, \lambda\,|b|)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

   Pl. $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$, $\lambda = 1$, $v = (1,1)$, $w = (-1,-1)$. (Vagy $1 \cdot v = v$; $v = (-1.-1)$.)

17. Melyik vektortéraxióma biztosítja azt, hogy ha λ rögzített skalár, akkor a $v \mapsto \lambda v$ leképezés összegtartó a V vektortéren?

   $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$

18. Melyik vektortéraxióma biztosítja azt, hogy ha $v \in V$ rögzített vektor egy T test fölötti V vektortérben, akkor $\mu \mapsto \mu v$ skalárszorostartó $T \to V$ leképezés?

   $\mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$ (ami ugyanezen axióma miatt $\lambda(\mu v)$-vel egyenlő).

19. Melyik vektortéraxióma biztosítja azt, hogy ha $v \in V$ rögzített vektor egy T test fölötti V vektortérben, akkor $\mu \mapsto \mu v$ összegtartó $T \to V$ leképezés?

   $(\mu+\lambda)v = \mu v + \lambda v$.