

1. A Horner-elrendezés

A polinomok műveleti tulajdonságai

Polinomokkal a „szokásos” módon számolhatunk:

Tétel (K2.1.6, HF ellenőrizni)

Tetszőleges f, g, h polinomokra érvényesek az alábbiak.

- (1) $(f + g) + h = f + (g + h)$ (az összeadás *asszociatív*).
- (2) $f + g = g + f$ (az összeadás *kommutatív*).
- (3) $f + 0 = 0 + f = f$ (az ilyen tulajdonságú 0 elem a *nullelem*).
- (4) Minden f -nek van *ellentettje*.
- (5) $(fg)h = f(gh)$ (a szorzás *asszociatív*).
- (6) $fg = gf$ (a szorzás *kommutatív*).
- (7) $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$ (a konstans 1 polinom *egységelem*).
- (8) $(f + g)h = fh + gh$ (*disztributivitás*).

HF: Vessük össze a négyzetes mátrixok műveleti tulajdonságaival.

Példa behelyettesítésre

Példa

Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$.

Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \left(((3x + 2)x + 0)x + 1 \right)x + 2$. Belülről kifelé:

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x^3 + 2x^2 + 1)x + 2 = \\ &= ((3x^2 + 2x)x + 1)x + 2 = \\ &= ((3x^2 + 2x + 0)x + 1)x + 2 = \\ &= (((3x + 2)x + 0)x + 1)x + 2. \end{aligned}$$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8	16	33	68

Lemásoljuk a főegyütthetót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk $b = 2$ -vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthetót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

$$3 \cdot 2 + 2 = 8$$

$$8 \cdot 2 + 0 = 16$$

$$16 \cdot 2 + 1 = 33$$

$$33 \cdot 2 + 2 = 68 \text{ Tehát } f^*(2) = 68 \text{ a konstans tag alatt jelenik meg.}$$

A Horner elrendezés (K2.4)

- (1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)
- (2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.
- (3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk b -vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.
- (4) Az $f^*(b)$ értékét az alsó sor végéről olvashatjuk le.

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0.$$

	a_n	\dots	a_{j+1}	a_j	\dots	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$	\dots	c_j	$c_j b + a_j =$	\dots	c_0	$c_0 b + a_0 =$
	c_{n-1}	\dots	c_j	$= c_{j-1}$	\dots	c_0	$= f^*(b)$

A Horner-tétel bizonyítása

Legyen $f(x) = a_n x^n + \dots + a_{j+1} x^{j+1} + a_j x^j + \dots + a_1 x + a_0$,

a_n	\dots	a_{j+1}	a_j	\dots	a_1	a_0	$c_{j-1} = bc_j + a_j$
$c_{n-1} = a_n$	\dots	c_j	c_{j-1}	\dots	c_0	B	$B = bc_0 + a_0$

és $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0$.

Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x - b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (K2.4.4. Gyakorlat)

Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$\begin{aligned} (x - b)(c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_j x^j + c_{j-1} x^{j-1} + \dots + c_1 x + c_0) + B &= \\ = c_{n-1} x^n + \dots + (c_{j-1} - bc_j) x^j + \dots + (c_0 - bc_1) x - bc_0 + B. \end{aligned}$$

Itt $c_{n-1} = a_n$, $c_{j-1} - bc_j = a_j$ ha $1 \leq j < n$, $-bc_0 + B = a_0$.

Tehát ez $f(x)$, azaz $f(x) = (x - b)q(x) + B$. A b -t behelyettesítve $f^*(b) = B$ (hiszen $x - b$ nullává válik). □

2. A polinomok azonossági tétele

Több gyöktényező kiemelése

Tétel (K2.4.7. Tétel)

Minden $0 \neq f \in \mathbb{R}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) b_1, \dots, b_k számok az f -nek az összes \mathbb{R} -beli gyökei, és q -nak nincs gyöke \mathbb{R} -ben.

Bizonyítás

Ha f -nek nincs gyöke \mathbb{R} -ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó. (Üres szorzat!)

Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető). Ha q_1 -nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$. Stb.

Végül $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$, ahol q -nak nincs gyöke.

Belátjuk, hogy f -nek nincs más gyöke, mint b_1, \dots, b_k .

Valóban, ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \dots (b - b_k)q^*(b) = 0$. A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla. De $q^*(b) \neq 0$, ezért $b - b_j = 0$ valamelyik j -re. Azaz $b = b_j$. \square

A gyökök száma

Kérdés

Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha $f(x) = (x - b_1) \dots (x - b_k)q(x)$, akkor

$\text{gr}(f) = \text{gr}(x - b_1) + \dots + \text{gr}(x - b_k) + \text{gr}(q) = k + \text{gr}(q)$ (hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak). Így $k \leq \text{gr}(f)$.

Következmény (K2.4.7)

Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

Házi feladat (K2.4.9)

Mutassuk meg, hogy egy $n > 0$ fokú polinom minden értéket legfeljebb n helyen vehet föl.

Az azonossági tétel

A polinomok azonossági tétele (K2.4.10)

Ha két, legfeljebb n -edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor *egyenlők* (megfelelő együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás

Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$, akkor $(f - g)^*(c) = 0$.

Tehát $f - g$ -nek több, mint n gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb n lehet.

Ez ellentmond annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka, kivéve, ha $f - g = 0$, azaz $f = g$. \square

Következmény (K2.4.11)

Ha az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Vagyis \mathbb{R} fölött $f \mapsto f^*$ kölcsönösen egyértelmű.

3. Többszörös gyökök

A gyöktényezős alak (K2.5)

Ha az n -edfokú f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c konstans, akkor c az f főegyütthatója. Ez (ha létezik, akkor) az f polinom *gyöktényezős alakja*.

$$2x^3 - 6x - 4 = 2(x+1)(x+1)(x-2) = 2(x+1)^2(x-2).$$

Az $(x+1)(x^2+1)$ polinomnak *nincs* gyöktényezős alakja \mathbb{R} fölött.

Összevonva $f(x) = c(x-d_1)^{k_1}(x-d_2)^{k_2}\dots(x-d_m)^{k_m}$, ahol a d_1, \dots, d_m gyökök már *páronként különbözők*.

A k_i a d_i gyök *multiplicitása*. Azaz d_i egy k_i -szoros gyök.

Következmény (K, 63. oldal)

$\text{gr}(f) = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, vagyis az f polinomnak *multiplicitásokkal számolva* n darab gyöke van.

Többszörös gyökök

$f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$. Legyen $g(x) = x-2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$ (de polinom \neq polinomfüggvény).

Definíció (K2.5.5)

Az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak a $b \in \mathbb{R}$ szám k -szoros gyöke (vagyis a b gyök *multiplicitása* k), ha $f(x) = (x-b)^k q(x)$, ahol a $q \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak b már nem gyöke: $q(b) \neq 0$.

Azaz $q(x)$ -ből az $x-b$ gyöktényező már nem emelhető ki. Tehát $x-b$ kiemelhető $f(x)$ -ből k -szor, de $k+1$ -szer már nem.

A többszörös gyökök sokszor meghatározhatók a *formális deriválás* módszerével (K3.6. szakasz, később szerepel majd).

Az iterált Horner-elrendezés

Hányszoros gyöke az $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az 1?

	1	-1	0	-1	1	$x^4 - x^3 - x + 1$
$x = 1$	1	0	0	-1	0	$(x - 1)(x^3 - 1)$
$x = 1$	1	1	1	0		$(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$
$x = 1$	1	2	3			$(x - 1)^2((x - 1)(x + 2) + 3)$
$x = 1$	1	3				$(x - 1)^2((x - 1)((x - 1) + 3) + 3)$
$x = 1$	1					$(x - 1)^4 + 3(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2$

Az $x - 1$ másodszori kiemeléséhez az együtthatók az alsó sorban vannak! Az 1 kétszeres gyök, mert $x^2 + x + 1$ -nek már nem gyöke. Ennek ellenére folytatjuk az eljárást, amíg lehet! Az eljárás véget ért, az eredmény beszorzással $(x - 1)$ polinomjává alakítható. Tehát $f(x) = g(x - 1)$, ahol $g(y) = y^4 + 3y^3 + 3y^2$.

A $g(y)$ együtthatóit fölfelé haladva a sorok utolsó számai adják.

HF: Általában is így kaphatjuk $g(x - b) = f(x)$ együtthatóit.

4. A binomiális tétel

Binomiális együtthatók

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, akkor ezeket $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ különböző módon tudjuk sorba rakni. Az itt szereplő $n!$ szám neve: n faktoriális. Üres szorzat: $0! = 1$.

Ismétlés

Ha van n tárgyunk, és ebből k darabot akarunk kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül), akkor ezt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} = \frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{k!}$$

különböző módon tehetjük meg. Az itt szereplő kifejezés az „ n alatt a k ” binomiális együttható. Megállapodás szerint ennek értéke nulla, ha $k > n$, vagy ha $k < 0$.

A binomiális tétel

Fejtsük ki az $(a + b)^3$ szorzatot.

Az $(a + b)(a + b)(a + b)$ szorzatot kifejtve egy összeget kapunk. A tagok $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$ szorzatok, ahol $u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}$, az összes lehetséges kombinációban (összesen $2^3 = 8$ tag).

a^3 csak egyféleképpen keletkezhet: ha $u_1 = u_2 = u_3 = a$.

a^2b úgy keletkezhet, hogy u_1, u_2, u_3 közül kettő a -val egyenlő.

Ezt a kettőt $\binom{3}{2} = 3$ -féleképpen választhatjuk ki.

Hasonlóan ab^2 -ből is három darab lesz, b^3 -ből pedig egy.

A binomiális tétel (K2.2.46, K2.1.4, K2.1.10)

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}a^{n-j}b^j.$$

5. Összefoglaló

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Gyöktényezős alak (K2.5). Gyök multiplicitása (K2.5.5).

Tételek

A polinomok műveleti tulajdonságai (K2.1.6). A Horner-elrendezés (K2.4.4). Gyöktényezőik kiemelése egyszerre (K2.4.7). Polinomnak legfeljebb foknyi számú gyöke van (K2.4.7). A polinomok azonossági tétele (K2.4.10). Polinom és polinomfüggvény kapcsolata (K2.4.11). Átalakítás $x - b$ polinomjává iterált Horner-eljárással. A binomiális tétel (K2.2.42).