1. Oszlopvektorok

Vektorok és helyvektorok

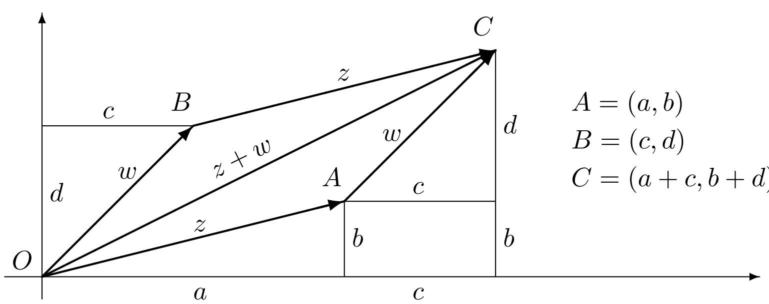
Ismétlés
A sík *vektorai* irányított szakaszok, de két vektor *egyenlő*, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható. A sík minden pontját egyértelműen kijelöli egy ilyen $\overrightarrow{OA}$ vektor A végpontja. Ez az A pont *helyvektora*.

Jelölés
Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató vektort szintén az (a, b) számpárral adjuk meg. Tehát beszélhetünk a $z = (a, b) = \overrightarrow{OA}$ vektorról.

Vektorösszeadás

A vektorok *összeadása* egymás után fűzéssel történik: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.



$A = (a, b)$
$B = (c, d)$
$C = (a + c, b + d)$

Ez a *paralelogramma-szabály*, hiszen $OACB$ paralelogramma.
A $z = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = (a, b)$ és $w = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = (c, d)$ vektorok összege $z + w = \overrightarrow{OC} = (a + c, b + d)$.

Skalárral szorzás

Legyen λ valós szám (skalár). Az $\overrightarrow{OA}$ vektor λ-szorosa az $\overrightarrow{OB}$, ahol a B pontot úgy kapjuk, hogy az A pontot az origóból $|\lambda|$-szorosára nyújtjuk, és ha λ negatív, akkor tükrözzük is az origóra.

Állítás
Ha $\overrightarrow{OA} = (a, b)$, akkor $\lambda\overrightarrow{OA} = (\lambda a, \lambda b)$. □

Az (a, b) vektort néha oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

Általános vektorok, műveletek

F3.1.5. Definíció
Legyen $T = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$ (valós, illetve racionális számok). A T fölötti n magas *oszlopvektorok* az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú „táblázatok”, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Az összes ilyen oszlopvektorból álló halmaz jele T^n. Az n szám a T^n *dimenziója*. A sík, azaz $\mathbb{R}^2$ kétdimenziós.

Értelmezzük T^n-en az *összeadást* és a $\lambda \in T$ *skalárral szorzást.*

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

Azaz összeadni és skalárral szorozni *komponensenként* kell.

A műveleti tulajdonságok

A *nullvektor* $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az *ellentett*: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és $\lambda, \mu \in T$ skalárokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a *nullvektor*).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u *ellentettje*).

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T *egységeleme*).

2. Mátrixösszeadás és skalárral szorzás

Mátrixok

F2.1.1. Definíció
$T = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$. Egy $n \times m$-es *mátrix* egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melyben T elemei vannak. Ezek halmazát $T^{n \times m}$ jelöli. Így T^n elemei $n \times 1$-es mátrixok. A *sorvektorok* az $1 \times m$-es mátrixok.

Az $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times m}$ azt az n sorból és m oszlopból álló mátrixot jelöli, amelyben az i-edik sor j-edik eleme $a_{ij} \in T$. Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{2\times 3}$, akkor $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

Ha $M = ((i+j)) \in T^{2\times 2}$, akkor $M = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Ha $M = ((a_{ij} + b_{ij})) \in T^{2\times 2}$, akkor $M = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$.

Összeg, λ-szoros, nullmátrix, ellentett

F2.1.2. Definíció
$M = ((a_{ij}))$ és $N = ((b_{ij})) \in T^{n\times m}$ mátrixok és $\lambda \in T$. Ekkor
$M + N = ((a_{ij} + b_{ij})) \in T^{n\times m}$ az M és N *összege*
(a két mátrix megfelelő elemeit összeadjuk);
$\lambda M = ((\lambda a_{ij})) \in T^{n\times m}$ az M mátrix λ-*szorosa*
(a mátrix minden elemét λ-val szorozzuk).

Két mátrixot akkor lehet összeadni, ha ugyanaz a méretük.

Definíció
Az $n \times m$-es *nullmátrix* az a mátrix, melynek minden eleme a T nulleleme. A nullmátrix jele: 0. Egy $n \times m$-es M mátrix *ellentettje* az a mátrix, melynek minden eleme az M megfelelő elemének ellentettje. $M = ((a_{ij}))$ ellentettje $-M = ((-a_{ij})) = (-1)M$.

A műveleti tulajdonságok

F2.1.3. Tétel (HF ellenőrizni)
Tetszőleges $M, N, K \in T^{n\times m}$ mátrixokra és $\lambda, \mu \in T$ skalárokra

(1) $(M + N) + K = M + (N + K)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $M + N = N + M$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $M + 0 = 0 + M = M$ (0 a *nullmátrix*).

(4) $M + (-M) = (-M) + M = 0$ ($-M$ az M *ellentettje*).

(5) $(\lambda + \mu)M = \lambda M + \mu M$.

(6) $\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N$.

(7) $(\lambda\mu)M = \lambda(\mu M)$.

(8) $1 \cdot M = M$ (ahol 1 a T *egységeleme*).

(9) $0 \cdot M = \lambda \cdot 0 = 0$, és ha $\lambda M = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $M = 0$.

Kétféle 0

3. Mátrixok szorzása

Sor és oszlop szorzata

Szorzás 2×2-es mátrixokra

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Definíció

Legyen $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_m.$

Minden elemet a neki megfelelővel szorozzuk, majd összeadjuk.

2×2-es: *az első mátrix sorait szoroztuk a második oszlopaival!*

A szorzás definíciója

F2.1.4. Definíció

A szorzatmátrix i-edik sorának j-edik eleme az első mátrix i-edik sorának és a második mátrix j-edik oszlopának szorzata. Ez akkor értelmes, ha az első mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, ahány sora a másodiknak.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times m}$ és $N = ((b_{ij})) \in T^{m \times k}$, akkor az $MN \in T^{n \times k}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj} = \sum_{\ell=1}^{m} a_{i\ell}b_{\ell j}$.

Miért így? Következő félévben lineáris transzformációkkal.

Negatív tulajdonságok

Tétel

Az $n \times n$-es mátrixok között a szorzás $n \geq 2$ esetén *nem kommutatív* és *nem nullosztómentes*, azaz két nem nulla mátrix szorzata lehet a nullmátrix.

Bizonyítás $n = 2$-re

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, ami nem ugyanaz, mint

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tehát *nem kommutatív.*

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, azaz *nem nullosztómentes.* $\square$

HF: a tengelyes tükrözések kompozíciója sem mindig kommutatív.

Asszociativitás, egységmátrix

F2.1.5. Tétel
A mátrixok szorzása *asszociatív*. Azaz $(MN)K = M(NK)$, feltéve, hogy az összes szükséges szorzást el lehet végezni. Azaz ha $M \in T^{n\times m}$, $N \in T^{m\times k}$, $K \in T^{k\times \ell}$.

Bizonyítás számolással, de a következő félévben elegánsan is.

Az $n \times n$-es E_n *egységmátrix* az a mátrix, ahol az i-edik sor j-edik eleme 1 ha $i = j$, és 0 ha $i \neq j$. Azaz a *főátlóban* végig 1 van, másutt csupa 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

F2.1.3. Feladat
Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor $E_n M = M E_n = M$.

A szorzás szabályai

F2.1.5. Tétel
Ha $M, N, K \in T^{n\times n}$ tetszőleges mátrixok és $\lambda, \mu \in T$, akkor

(1) $(M + N) + K = M + (N + K)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $M + N = N + M$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $M + 0 = 0 + M = M$ (0 a *nullmátrix*).

(4) $M + (-M) = (-M) + M = 0$ ($-M$ az M *ellentettje*).

(5) A szorzás asszociatív.

(6) Igaz mindkét oldali *disztributivitás*, azaz $M(N + K) = MN + MK$ és $(N + K)M = NM + KM$.

(7) Az E_n egységmátrix kétoldali *egységelem*: $E_n M = M E_n = M$.

Továbbá $\lambda(MN) = (\lambda M)N = M(\lambda N)$ is teljesül.

Bizonyítás: a következő félévben, lineáris transzformációkkal.

Mátrix transzponáltja

F2.1.6. Definíció
Egy mátrix *főátlója* a bal felső sarokból 45° alatt induló egyenesen lévő elemekből áll. Ezek azok, amelyeknek a sor- és oszlopindexe megegyezik.
Egy mátrix *transzponáltja* a főátlójára vett tükörképe.
Azaz ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times m}$, akkor $M^T = ((a_{ji})) \in T^{m\times n}$. (A két indexet megcseréljük; az i-edik sorból i-edik oszlop lesz.)

Példák

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$

Sorvektor transzponáltja oszlopvektor és viszont.

4. Mátrix inverze

Az inverz definíciója és kiszámítása

Definíció (F, 2.2. szakasz)
Ha $M, N \in T^{n\times n}$, akkor M és N egymás *inverzei*, ha $MN = NM = E_n$ (az $n \times n$-es egységmátrix). Jele: $N = M^{-1}$.

$M \in T^{n\times n}$ **invertálása Gauss-eliminációval (F3.5.3. Tétel)**

- $K := [M, E_n] \in T^{n\times 2n}$ (írjuk M mellé az egységmátrixot).
- Végezzük el a Gauss-eliminációt a K mátrixra úgy, hogy *vezéregyest kizárólag a bal oldalon* (az első n oszlopban) *választhatunk*.
- Ha keletkezik „tilos” sor (melynek az első fele végig nulla), akkor M *nem invertálható*.
- Egyébként sorcserékkel K bal feléből az egységmátrix lesz. Ekkor K *jobb felén* M^{-1} *keletkezik*: $[M, E_n] \to [E_n, M^{-1}]$.

2×2-es mátrix inverze

Tétel
Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ *inverze* $\dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.
Később: Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

Bizonyítás
$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$.
Ezt $ad - bc$-vel osztva az egységmátrixok kapjuk.
HF: Ellenőrizzük a szorzást a másik sorrendben is.

Lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{gathered}$$

Definíció

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az M a fenti lineáris egyenletrendszer mátrixa. Az $Mx = b$ az egyenletrendszer *mátrixos alakja* (az eredeti egyenleteknek egy képletben való, tömör felírása). Ha M négyzetes és invertálható, akkor a megoldás $x = M^{-1}b$.

5. Összefoglaló

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Vektorösszeadás a síkon, helyvektor. Vektor- és mátrixműveletek: összeg, skalárszoros, nulla, ellentett. Szorzat, egységmátrix, inverz, transzponált (F2. fejezet).

Tételek
A mátrixok és vektorok műveleti tulajdonságai (F2. fejezet). A nullosztómentesség és a kommutativitás *nem* teljesül általában. Az inverz kiszámítása Gauss-eliminációval (F3.5.3. Tétel).