1. A determináns definíciója

A 3×3-as determináns elemzése

$$M=((a_{ij}))\implies \det(M)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$

Mind a hat tagban (pl. $a_{12}a_{23}a_{31}$-ben) az első indexek: $1,2,3$, így mindegyik szorzatnak *a determináns minden sorában* van tényezője. A második indexek egy *PERMUTÁCIÓT* adnak, pl. $2,3,1$. Ezért *a determináns minden oszlopában is van egy tényező.* A pozitív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}$$

Ezek előjele $+1$ (rendre 0, 2, 2 darab inverzió). A negatív előjellel ellátott tagokhoz tartozó három permutáció:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix}$$

Ezek előjele -1 (rendre 3, 1, 1 darab inverzió).

A 3×3-as determináns permutációs képlete

$$f_1=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\qquad f_2=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}\qquad f_3=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}$$
$$f_4=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\qquad f_5=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}\qquad f_6=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix}$$

$\mathrm{sg}(f_1)=\mathrm{sg}(f_2)=\mathrm{sg}(f_3)=+1,\quad \mathrm{sg}(f_4)=\mathrm{sg}(f_5)=\mathrm{sg}(f_6)=-1.$

$$\begin{gathered}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}=\\ =\mathrm{sg}(f_1)a_{1f_1(1)}a_{2f_1(2)}a_{3f_1(3)}+\mathrm{sg}(f_2)a_{1f_2(1)}a_{2f_2(2)}a_{3f_2(3)}+\\ +\mathrm{sg}(f_3)a_{1f_3(1)}a_{2f_3(2)}a_{3f_3(3)}+\mathrm{sg}(f_4)a_{1f_4(1)}a_{2f_4(2)}a_{3f_4(3)}+\\ +\mathrm{sg}(f_5)a_{1f_5(1)}a_{2f_5(2)}a_{3f_6(3)}+\mathrm{sg}(f_6)a_{1f_6(1)}a_{2f_6(2)}a_{3f_6(3)}=\\ =\sum_{f\in S_3}\mathrm{sg}(f)a_{1f(1)}a_{2f(2)}a_{3f(3)}\,.\end{gathered}$$

Az $n\times n$-es determináns definíciója

Definíció (F1.2.2. Definíció)
Legyen $T=\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}$ és $M=((a_{ij}))\in T^{n\times n}$ egy $n\times n$-es mátrix. Ekkor az M determinánsa legyen

$\det(M)=\sum_{f\in S_n}\mathrm{sg}(f)a_{1f(1)}a_{2f(2)}\dots a_{nf(n)}$.

Példa
Az 5×5-ös determináns $5! = 120$ tagból áll. Az
$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
permutáció előjele $+1$ (láttuk, hogy 6 inverzió van).
Az ehhez tartozó tag $+a_{12}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51}$.
FONTOS: e szorzat előjelét a permutáció előjele, és *NEM* a később tanulandó kifejtésnél definiált sakktáblaszabály adja!

2. A determináns alaptulajdonságai

A megkívánt tulajdonságok
Tétel (F1.3.1–1.3.6 és F2.2.2–2.2.4)
Ha $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A skalárszoros-tartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum_{f\in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)}a_{2f(2)}\dots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás (F1.3.1/III)
Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.
Azaz a_{1j} helyére λa_{1j} kerül.
A fenti összegben minden tag első tényezője a_{1j} alakú alkalmas j-re, és több tényező a determináns első sorából nincs. Ezért az új determinánsban minden tag λ-val szorzódik. Így a teljes összeg, azaz a determináns is λ-val szorzódik. □

Ugyanez lesz, ha bármelyik oszlopot vagy sort szorozzuk λ-val, mert *az összeg mindegyik tagjában minden sorból és oszlopból pontosan egy tényező van.*

Az összegtartás

Legyen $T = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum\limits_{f\in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Összegtartás (F1.3.2)
Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = b_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} + c_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$. Így az eredeti determináns is két determináns összegére bomlik, melyekben az első sorban b_{1j}, illetve c_{1j} szerepel. $\square$

Ugyanez történik, ha bármelyik másik oszlopot vagy sort bontjuk összegre.
<u>HF:</u> 3×3-asra részletezni ezt a bizonyítást.

3×3-as felső háromszögmátrix

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Felső háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

felső háromszögmátrix, ha $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$. Ezért a fenti összeg utolsó öt tagja nulla lesz. $\square$

Elemzés
A főátló alatti elemek azok, ahol a sorindex nagyobb, mint az oszlopindex, azaz a_{ij}, ahol $i > j$.

A megmaradó tag az *identikus permutációhoz* tartozik.

Általános felső háromszögmátrix

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: *ha mindenki a saját helyén ül.*
<u>Mert:</u> Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet. Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt. Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa (F1.2.3. Feladat)
Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$. Az $a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$ mikor nem 0?
Az kell: $i \leq f(i)$ minden i-re. A fenti miatt $f = id$.
Tehát a determináns $\mathrm{sg}(id) a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$. Mivel $\mathrm{sg}(id) = 1$, ez tényleg a főátlóbeli elemek szorzata. $\square$

3×3-as: két oszlop egyenlősége

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$.
Általánosabban: $a_{i2} = a_{i3}$ mindegyik i-re. A fenti összeg tagjai kiejtik egymást, mert $a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33}$.
Az előjelezés arra való, hogy általában is minden így kiessen.

Két sor egyenlősége (F1.3.3)

$\det(M) = \sum\limits_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Tegyük föl, hogy az i-edik és a j-edik *sor* egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.
$a_{1f(1)} \dots a_{if(i)} \dots a_{jf(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.
$a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)} = \underline{a_{1f(1)} \dots a_{if(j)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{nf(n)}}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét). Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja $\underline{g}$.
Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $\overline{g(\ell)} = f(\ell)$, ha $\ell \neq i, j$. Ezért $g = f \circ (i, j)$.
Azaz $\mathrm{sg}(g) = \mathrm{sg}(f)\mathrm{sg}\big((i,j)\big) = -sg(f)$.
Tehát a sárga és <u>kék</u> tagok kiejtik egymást. Láttuk: ez a megfeleltetés párokba állítja a tagokat, mert $\big(f \circ (i,j)\big) \circ (i,j) = f$. Tehát minden tag kiesik. $\square$

3×3-as: a transzponált determinánsa

$$\begin{aligned} M = ((a_{ij})) &\implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}- \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,. \\ M^T = ((b_{ij})) &\implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32}- \\ &\quad -b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,. \end{aligned}$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.
$b_{11}b_{22}b_{33} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = \underline{a_{12}a_{23}a_{31}}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = \underline{a_{13}a_{22}a_{31}}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = \underline{a_{11}a_{23}a_{32}}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = \underline{a_{12}a_{21}a_{33}}$. Előjel: -1. $\square$

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk

$b_{12}b_{23}b_{31} = \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás *inverzei.*

$b_{13}b_{22}b_{31} = \underline{a_{13}a_{22}a_{31}}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{g} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ezek is egymás *inverzei.*

Az összes többi tagnál is inverz permutációkat kapunk.

A transzponált determinánsa (F1.3.6)

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum\limits_{g\in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)}a_{2g(2)}\dots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum\limits_{f\in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)}b_{2f(2)}\dots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)}b_{2f(2)}\dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1}a_{f(2)2}\dots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1}a_{f(2)2}\dots a_{f(n)n} = \underline{a_{1g(1)}a_{2g(2)}\dots a_{ng(n)}}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a sárga szorzatban, ha $i = f(j)$. Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$. A sárga és kék szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért $i = f(j) \iff g(i) = j$. Ez azt jelenti, hogy $g = f^{-1}$.

Tehát a $\det(M^T)$-ban szereplő, $f \in S_n$-hez tartozó tag megegyezik a $\det(M)$-beli $g = f^{-1} \in S_n$-hez tartozó taggal. Mivel $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$, ezért a két tag előjele is ugyanaz. Az $f \leftrightarrow f^{-1}$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés S_n-en. $\square$

3. Összefoglaló

A 16. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A determináns definíciója (F1.2.2).

Tételek

A determináns tulajdonságainak bizonyítása: linearitás (F1.3.1–2), felső háromszögmátrix (F1.3.3), két sor egyenlősége (F1.3.3), transzponált (F1.3.3). A transzponált determináns definíciójában szereplő tagok az inverz permutációhoz tartoznak.