Algebra és számelmélet

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Konzultáció: Kiss Emil
http://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress
ewwkiss@gmail.com

23. előadás

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű.

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben,

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység,

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység,
ha egy olyan konstans polinom,

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység,
ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x+1$ osztója x^2-1-nek

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x+1$ osztója x^2-1-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében,

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység,
ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x+1$ osztója x^2-1-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében,
mert $x^2-1=(x+1)(x-1)$,

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x+1$ osztója x^2-1-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2-1=(x+1)(x-1)$, és $x-1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x - 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x - 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.
2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében,

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység,
ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében,
mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x - 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.
2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében,
mert $x = 2(x/2)$,

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység,
ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében,
mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x - 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.
2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében,
mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység,
ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében,
mert $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, és $x - 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében,
mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 nem osztója x-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben,

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x+1$ osztója x^2-1-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében, mert $x^2-1=(x+1)(x-1)$, és $x-1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében, mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

2 nem osztója x-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben, mert ha $2h(x) = x$ lenne, ahol $h(x) = c_0 + c_1 x + \ldots$, és $c_0, c_1, \ldots$ egészek,

Oszthatóság

Ismétlés (K3.1.3, K2.3.2)

Legyen R szokásos gyűrű. A $g \in R[x]$ osztója $f \in R[x]$-nek $R[x]$-ben, ha létezik olyan $h \in R[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.
Jelölés: $g \mid f$ (vagy néha $g \mid_{R[x]} f$).
Az $f \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység,
ha egy olyan konstans polinom, amely egység R-ben.

$x + 1$ osztója $x^2 - 1$-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ mindegyikében,
mert $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, és $x - 1 \in \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.
2 osztója x-nek $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ mindegyikében,
mert $x = 2(x/2)$, és $x/2 \in \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.
2 nem osztója x-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben, mert ha $2h(x) = x$ lenne,
ahol $h(x) = c_0 + c_1 x + \ldots$, és $c_0, c_1, \ldots$ egészek,
akkor x együtthatóját véve $2c_1 = 1$ teljesülne.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben,
és $f, g \in \mathbb{R}[x]$.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\operatorname{gr}(r) < \operatorname{gr}(g)$.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$.

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$. De $q \in \mathbb{R}[x]$,

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$. De $q \in \mathbb{R}[x]$, ezért $h \in \mathbb{R}[x]$. $\square$

A hányados együtthatói

Következmény (K3.2.2)

Tegyük föl, hogy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek $\mathbb{C}[x]$-ben, és $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $g \mid f$ teljesül $\mathbb{R}[x]$-ben is.

Bizonyítás

A feltevés szerint $f(x) = g(x)h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
Osszuk el maradékosan f-et g-vel $\mathbb{R}[x]$-ben:

$$f = gq + r,$$

ahol $q, r \in \mathbb{R}[x]$ és $r = 0$, vagy $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.
Ez $\mathbb{C}[x]$-ben is egy maradékos osztás. De $\mathbb{C}[x]$-ben

$$f = gh + 0$$

is egy maradékos osztás. A $\mathbb{C}[x]$-beli egyértelműség miatt $q(x) = h(x)$. De $q \in \mathbb{R}[x]$, ezért $h \in \mathbb{R}[x]$. □

Ugyanígy $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{Q}$-ra is.

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű.

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött,

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység,

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$,

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező:

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött,

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.
$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező:

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.
$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$.

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.
$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$.
$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező:

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.
$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$.
$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező: $(6x^2 - 12) \cdot (x^2 + 1)$.

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.
$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$.
$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező: $(6x^2 - 12) \cdot (x^2 + 1)$.
$\mathbb{Z}[x]$-ben 4 tényező:

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.
$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$.
$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező: $(6x^2 - 12) \cdot (x^2 + 1)$.
$\mathbb{Z}[x]$-ben 4 tényező: $2 \cdot 3 \cdot (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1)$.

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.
$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$.
$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező: $(6x^2 - 12) \cdot (x^2 + 1)$.
$\mathbb{Z}[x]$-ben 4 tényező: $2 \cdot 3 \cdot (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1)$.

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.
A $\mathbb{Z}[x]$-ben 6 nem egység,

Példák felbontásra

Ismétlés (K3.1.13)

Legyen R szokásos gyűrű. Az $f \in R[x]$ polinom irreducibilis R fölött, ha nem nulla, nem egység, és ha $f = gh$, ahol $g, h \in R[x]$, akkor g és h valamelyike egység (azaz konstans, és R-ben egység).

Példa (K3.3.14)

Az $f(x) = 6(x^2 - 2)(x^2 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$ alaptétel szerinti felbontásai:
$\mathbb{C}[x]$-ben 4 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x + i) \cdot (x - i)$.
$\mathbb{R}[x]$-ben 3 tényező: $(6x - 6\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x^2 + 1)$.
$\mathbb{Q}[x]$-ben 2 tényező: $(6x^2 - 12) \cdot (x^2 + 1)$.
$\mathbb{Z}[x]$-ben 4 tényező: $2 \cdot 3 \cdot (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1)$.

A 6 nem lehet külön tényező $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ fölött, mert egység.
A $\mathbb{Z}[x]$-ben 6 nem egység, sőt 2, 3 itt irreducibilis polinomok.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött,

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans,

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben,

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom,

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben,

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben, akkor biztosan NEM irreducibilis $T[x]$-ben.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben, akkor biztosan NEM irreducibilis $T[x]$-ben. Ha nincs gyöke, attól még lehet reducibilis!

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben, akkor biztosan NEM irreducibilis $T[x]$-ben. Ha nincs gyöke, attól még lehet reducibilis! Példa: $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x^2+1)^2$.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben, akkor biztosan NEM irreducibilis $T[x]$-ben. Ha nincs gyöke, attól még lehet reducibilis! Példa: $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x^2+1)^2$.

(5) Gyök létezése elsőfokú irreducibilis tényezőnek felel meg.

Gyökök és irreducibilitás

Tétel (K3.3. szakasz)

Legyen T test.

(1) Az $f \in T[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis T fölött, ha nem konstans, és nem bontható $T[x]$-ben alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.

(2) Elsőfokú polinom mindig irreducibilis $T[x]$-ben.

(3) Másod- és harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $T[x]$-ben, ha nincs gyöke T-ben.

(4) Legalább negyedfokú polinom, HA van gyöke T-ben, akkor biztosan NEM irreducibilis $T[x]$-ben. Ha nincs gyöke, attól még lehet reducibilis! Példa: $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x^2+1)^2$.

(5) Gyök létezése elsőfokú irreducibilis tényezőnek felel meg.

Ezek közül csak (4) igaz $\mathbb{Z}[x]$-ben!

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység,

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans,

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$.

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$.

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$.
Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges,

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység.

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység. Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$.
Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység.
Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető,

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység. Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető, és ezért f-nek van elsőfokú tényezője T fölött.

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység. Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető, és ezért f-nek van elsőfokú tényezője T fölött. Megfordítva, ha $f = gh$, és például g foka 1,

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$.
Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység.
Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető, és ezért f-nek van elsőfokú tényezője T fölött.
Megfordítva, ha $f = gh$, és például g foka 1, akkor
$g(x) = ax + b$ alakú,

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység. Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető, és ezért f-nek van elsőfokú tényezője T fölött. Megfordítva, ha $f = gh$, és például g foka 1, akkor $g(x) = ax + b$ alakú, ezért $-b/a \in T$ gyöke g-nek,

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység. Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető, és ezért f-nek van elsőfokú tényezője T fölött. Megfordítva, ha $f = gh$, és például g foka 1, akkor $g(x) = ax + b$ alakú, ezért $-b/a \in T$ gyöke g-nek, így f-nek is.

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység. Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető, és ezért f-nek van elsőfokú tényezője T fölött. Megfordítva, ha $f = gh$, és például g foka 1, akkor $g(x) = ax + b$ alakú, ezért $-b/a \in T$ gyöke g-nek, így f-nek is. Tehát gyök létezése tényleg elsőfokú tényezőnek felel meg.

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység. Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető, és ezért f-nek van elsőfokú tényezője T fölött. Megfordítva, ha $f = gh$, és például g foka 1, akkor $g(x) = ax + b$ alakú, ezért $-b/a \in T$ gyöke g-nek, így f-nek is. Tehát gyök létezése tényleg elsőfokú tényezőnek felel meg.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 2$ vagy 3,

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység. Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető, és ezért f-nek van elsőfokú tényezője T fölött. Megfordítva, ha $f = gh$, és például g foka 1, akkor $g(x) = ax + b$ alakú, ezért $-b/a \in T$ gyöke g-nek, így f-nek is. Tehát gyök létezése tényleg elsőfokú tényezőnek felel meg.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 2$ vagy 3, és $f = gh$ nemtriviális felbontás,

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység. Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető, és ezért f-nek van elsőfokú tényezője T fölött. Megfordítva, ha $f = gh$, és például g foka 1, akkor $g(x) = ax + b$ alakú, ezért $-b/a \in T$ gyöke g-nek, így f-nek is. Tehát gyök létezése tényleg elsőfokú tényezőnek felel meg.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 2$ vagy 3, és $f = gh$ nemtriviális felbontás, akkor $\mathrm{gr}(g)$ és $\mathrm{gr}(h)$ valamelyike 1,

Gyökök és irreducibilitás — bizonyításvázlat

Legyen T test. Ekkor egy $g \in T[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha nem 0 konstans, azaz a foka 0.

Ha $f = gh$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) + \mathrm{gr}(h)$. Ezért ez a felbontás akkor és csak akkor nemtriviális, ha $0 < \mathrm{gr}(g), \mathrm{gr}(h) < \mathrm{gr}(f)$. Így f akkor reducibilis, ha alacsonyabb fokúak szorzatára bomlik.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 1$, akkor ez nem lehetséges, és f nem is egység. Ezért elsőfokú polinom mindig irreducibilis.

Ha f-nek van egy $c \in T$ gyöke, akkor az $x - c$ gyöktényező kiemelhető, és ezért f-nek van elsőfokú tényezője T fölött. Megfordítva, ha $f = gh$, és például g foka 1, akkor $g(x) = ax + b$ alakú, ezért $-b/a \in T$ gyöke g-nek, így f-nek is. Tehát gyök létezése tényleg elsőfokú tényezőnek felel meg.

Ha $\mathrm{gr}(f) = 2$ vagy 3, és $f = gh$ nemtriviális felbontás, akkor $\mathrm{gr}(g)$ és $\mathrm{gr}(h)$ valamelyike 1, és ezért f-nek van gyöke T-ben. □

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, akkor irreducibilis (láttuk).

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, akkor irreducibilis (láttuk).
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, akkor irreducibilis (láttuk).
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, akkor irreducibilis (láttuk).
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, akkor irreducibilis (láttuk).
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen,

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, akkor irreducibilis (láttuk).
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen, és ezért h egység.

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, akkor irreducibilis (láttuk).
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen, és ezért h egység.
Tehát f tényleg elsőfokú. $\square$

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, akkor irreducibilis (láttuk).
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen, és ezért h egység.
Tehát f tényleg elsőfokú. $\square$

Egy komplex együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk,

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, akkor irreducibilis (láttuk).
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen, és ezért h egység.
Tehát f tényleg elsőfokú. $\square$

Egy komplex együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk,

Irreducibilitás $\mathbb{C}[x]$-ben

Tétel (K3.3.5)

A $\mathbb{C}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak.

Bizonyítás

Ha f elsőfokú, akkor irreducibilis (láttuk).
Megfordítva: Ha f irreducibilis, akkor legalább elsőfokú.
Az algebra alaptétele miatt van f-nek egy $c \in \mathbb{C}$ gyöke.
Ekkor $f(x) = (x - c)h(x)$ alkalmas $h \in \mathbb{C}[x]$-re.
Ez a felbontás triviális kell legyen, és ezért h egység.
Tehát f tényleg elsőfokú. $\square$

Egy komplex együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk, és a főegyütthatót valamelyik tényezőhöz hozzácsapjuk.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk (K2.5. szakasz)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x - b_1) \dots (x - b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk (K2.5. szakasz)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója.
Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk (K2.5. szakasz)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x - b_1) \ldots (x - b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk (K2.5. szakasz)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Állítás (K3.3.9)

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Az algebra alaptételének következménye

Beláttuk (K2.5. szakasz)

Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\ldots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom gyöktényezős alakja.

Beláttuk

Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Állítás (K3.3.9)

Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ötlet: párosítsunk minden gyököt a komplex konjugáltjával.

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom. Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga,

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$f\left(\overline{c}\right) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\ \overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\ \overline{c}^n = \overline{0}$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.
Így a bal oldalon $f\left(\overline{c}\right)$ áll,

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$f\left(\overline{c}\right) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0} = 0.$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.
Így a bal oldalon $f\left(\overline{c}\right)$ áll, a jobb oldalon 0,

Gyök konjugáltja

Állítás (K3.3.6)

Legyen $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ valós együtthatós polinom.
Ha $c \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek, akkor c konjugáltja is gyöke f-nek.

Bizonyítás

$$a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n = 0,$$

vegyük mindkét oldal konjugáltját.
A konjugálás összeg- és szorzattartó:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \text{ és } \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Így ezt kapjuk:

$$f\left(\overline{c}\right) = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \overline{0} = 0.$$

Valós szám konjugáltja önmaga, tehát $\overline{0} = 0$ és $\overline{a_j} = a_j$.
Így a bal oldalon $f\left(\overline{c}\right)$ áll, a jobb oldalon 0,
tehát $\overline{c}$ gyöke f-nek. $\square$

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.

Legyen $c = a + bi$,

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$,

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$,

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós,
akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) =$

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} =$

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény (K3.2.2) miatt $h(x)$ is valós együtthatós.

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyananannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény (K3.2.2) miatt $h(x)$ is valós együtthatós.
Az indukciós feltevés miatt c és $\overline{c}$ ugyanannyiszoros, mondjuk k-szoros gyökei $h(x)$-nek

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény (K3.2.2) miatt $h(x)$ is valós együtthatós.
Az indukciós feltevés miatt c és $\overline{c}$ ugyanannyiszoros, mondjuk k-szoros gyökei $h(x)$-nek ($k = 0$ is lehet!).

A konjugált multiplicitása

Állítás (K3.3.6)

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$, akkor c és a $\overline{c}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek.

Bizonyítás

f foka szerinti indukcióval. Ha c valós: nyilvánvaló.
Legyen $c = a + bi$, ekkor $\overline{c} = a - bi$. Ha c nem valós, akkor $c \neq \overline{c}$, így $x - c$ és $x - \overline{c}$ egyszerre kiemelhetők.
Tehát $f(x) = (x - c)(x - \overline{c})h(x)$, ahol $h \in \mathbb{C}[x]$.
$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - (c + \overline{c})x + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}[x]$.
A korábbi Következmény (K3.2.2) miatt $h(x)$ is valós együtthatós.
Az indukciós feltevés miatt c és $\overline{c}$ ugyanannyiszoros, mondjuk k-szoros gyökei $h(x)$-nek ($k = 0$ is lehet!).
Így $f(x)$-nek c és $\overline{c}$ is $k + 1$-szeres gyöke. □

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött. Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött. Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött. Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.
Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad.
Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött. Ha nem, láttuk korábban: $(x-c)(x-\overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad. Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor legfeljebb másodfokú. $\square$

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.
Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad.
Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor legfeljebb másodfokú. □

Egy valós együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött. Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad. Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor legfeljebb másodfokú. $\square$

Egy valós együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk $\mathbb{C}$ fölött,

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.
Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad.
Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor legfeljebb másodfokú. $\square$

Egy valós együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk $\mathbb{C}$ fölött, és mindegyik nem valós gyököt párosítjuk a komplex konjugáltjával.

Irreducibilitás $\mathbb{R}[x]$-ben

Tétel (K3.3.8)

Az $\mathbb{R}[x]$ irreducibilis polinomjai pontosan az elsőfokúak, továbbá azok a másodfokúak, melyeknek nincs valós gyöke.

Bizonyítás

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ legalább elsőfokú, akkor az algebra alaptétele miatt van c komplex gyöke. Ha c valós, $x - c$ kiemelhető $\mathbb{R}$ fölött.
Ha nem, láttuk korábban: $(x - c)(x - \overline{c})$ valós együtthatós, és $f(x)$-ből kiemelhető, ami $\mathbb{R}$ fölötti felbontást ad.
Ezért ha f irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, akkor legfeljebb másodfokú. $\square$

Egy valós együtthatós polinom irreducibilisekre való felbontását úgy kapjuk, hogy gyöktényezőkre bontjuk $\mathbb{C}$ fölött, és mindegyik nem valós gyököt párosítjuk a komplex konjugáltjával.

Példa: $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ (K2.5.10. Gyakorlat).

A 23. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Egység és irreducibilitás a polinomgyűrűben (K3.1.3, 2.3.2, 3.1.13).

A 23. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Egység és irreducibilitás a polinomgyűrűben (K3.1.3, 2.3.2, 3.1.13).

Tételek

Gyökök és irreducibilitás kapcsolata test fölött (K3.3).

A 23. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Egység és irreducibilitás a polinomgyűrűben (K3.1.3, 2.3.2, 3.1.13).

Tételek

Gyökök és irreducibilitás kapcsolata test fölött (K3.3).
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak
van valós gyöke (K3.3.9).

A 23. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Egység és irreducibilitás a polinomgyűrűben (K3.1.3, 2.3.2, 3.1.13).

Tételek

Gyökök és irreducibilitás kapcsolata test fölött (K3.3).
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak
van valós gyöke (K3.3.9).
Konjugált gyök multiplicitása valós együtthatós polinomra (K3.3.6).

A 23. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Egység és irreducibilitás a polinomgyűrűben (K3.1.3, 2.3.2, 3.1.13).

Tételek

Gyökök és irreducibilitás kapcsolata test fölött (K3.3).
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak
van valós gyöke (K3.3.9).
Konjugált gyök multiplicitása valós együtthatós polinomra (K3.3.6).
A $\mathbb{C}[x]$ és $\mathbb{R}[x]$ irreducibilisei (K3.3.5, 3.3.8).