Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

A 8. előadás-diához tartozó feladatsor

1. Mutassuk meg, hogy $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

3. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$ egészre $8 \mid 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$.

4. Milyen maradékot adhat egy négyzetszám 3-mal, 5-tel, illetve 8-cal osztva?

5. Határozzuk meg 7^{1867} utolsó számjegyét.

6. Miért nem lehet 100 páratlan szám reciprokösszege 1? Nehezebb: adjunk meg 100 különböző pozitív egész számot, amelyek reciprokösszege 1.

7. Lehet-e $1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$ két egymást követő egész szám szorzata?

8. Határozzuk meg a felírt szám hiányzó számjegyeit úgy, hogy teljesüljön az oszthatóság:

$$36 \mid \overline{52x2y},$$

$$99 \mid \overline{62xy427}.$$

9. Bizonyítsuk be, hogy $13 \mid \overline{abcabc}$ mindig teljesül.

10. Tegyük fel, hogy az (a, b, c számjegyekből álló) $\overline{abc}$ háromjegyű szám osztható 37-tel. Mutassuk meg, hogy ekkor a $\overline{bca}$ szám is osztható 37-tel.

11. Egy 3×3-as táblázatba különböző számjegyeket írtunk úgy, hogy a sorokból (balról jobbra) és az oszlopokból (felülről lefelé) kiolvasható hat darab, tízes számrendszerbeli háromjegyű szám mind osztható 6-tal. Mutassuk meg, hogy a hat szám közül pontosan egy osztható 5-tel. Adjunk is meg egy megfelelő kitöltést.

12. Egy egész oldalú téglalap területének és kerületének a mérőszáma megegyezik. Mekkorák lehetnek a téglalap oldalai?

13. Egy sokszög átlóinak száma prímszám. Hány oldalú a sokszög?

14. *(*)* Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, melyekre $n^4 + 4$ prímszám.

15. *(*)* Adjuk meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $n^2 + n + 1$ négyzetszám.

16. *(*)* Adjuk meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $1 + 2^{11} + 2^n$ négyzetszám.

17. *(*)* Igazoljuk, hogy $2^n \mid (n + 1)(n + 2) \ldots (2n)$.

18. *(**)* Határozzuk meg a $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}$ számok legnagyobb közös osztóját.

19. *(**)* Adjunk meg végtelen sok olyan n természetes számot, amelyre $n \mid 2^n + 1$ teljesül.

---

20. Lássuk be, hogy két páratlan szám négyzetének a különbsége mindig osztható 8-cal.

21. Igazoljuk, hogy $6 \mid n(n^2 + 5)$ minden n egész számra.

22. Bizonyítsuk be, hogy ha $5a + 9b$ osztható 23-mal, akkor $3a + 10b$ is osztható 23-mal.

23. Igazoljuk, hogy ha $27|\overline{abc}$ akkor $27|\overline{bca}$.

24. Mely p pozitív egész számokra lehet p, $p+2$ és $p+4$ egyszerre prím?

25. Halhatatlan kapitánynak három halhatatlan unokája van, akiknek az életkora három különböző prímszám, és ezek négyzetösszege is prímszám. Hány éves a kapitány legkisebb unokája?

26. Oldjuk meg a prímszámok körében a $p^2 - 2q^2 = 1$ egyenletet.

27. Adjunk meg végtelen sok olyan n-et, amelyre $29 \mid 2^n + 5^n$.

28. *(*)* Igazoljuk, hogy ha $3 \nmid k$, akkor $7 \mid 1^k + 4^k + 9^k$.

29. *(*)* Oldjuk meg a $3^n + 4^n = 5^n$ egyenletet a pozitív egész számok körében.

30. *(*)* Igazoljuk, hogy végtelen sok $4k-1$, illetve $6k-1$ alakú (pozitív) prím van.

31. *(*)* Mutassuk meg, hogy az $2^{2^n} - 1$ számnak legalább n különböző (pozitív) prímosztója van.

32. *(**)* Adjuk meg az összes olyan (pozitív) prímszámot, aminek alkalmas (pozitív egész kitevős) hatványa felírható két pozitív egész szám köbének az összegeként.

33. *(**)* Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan nem konstans egész együtthatós $f(x)$ polinom, amely az x változó minden egész értékére prímet vesz fel.

34. *(**)* Bizonyítsuk be hogy $k\ell + 1$ darab pozitív egész szám közül mindig vagy kiválasztható $k+1$ darab olyan, amelyek közül egyik sem osztója a másiknak, vagy pedig $\ell + 1$ darab olyan, amelyek sorba rakhatók úgy, hogy mindegyik szám osztója a következő számnak.