

Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat
Az 3. és 4. előadás-diához tartozó feladatsor

1. Számítsuk ki az alábbi összegeket és szorzatokat.

$$\sum_{j=6}^9 (-1)^j, \quad \sum_{2 < j < 5} 2j + 1, \quad \sum_{2 < j < k < 6} jk, \quad \sum_{p < 7 \text{ prím}} p^2, \quad \prod_{1 \leq i \leq 100000} (i - 213),$$

$$\sum_{i=1}^n i, \quad \prod_{i=1}^n 2^i, \quad \sum_{i=0}^n q^i, \quad (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}, \quad \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{20} ij - \sum_{j=1}^{20} \sum_{i=1}^{100} ij,$$

$$\sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i}, \quad \sum_{i=0}^{100} 2^i \binom{100}{i}, \quad \sum_{i=0}^{100} (-1)^i \binom{100}{i}, \quad \sum_{i=0}^{50} \binom{100}{2i}, \quad \sum_{i=0}^{50} \binom{101}{i}.$$

Írjuk föl a szumma jelölés segítségével $(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{j=1}^k b_j)$ beszorzott alakját.

2. Egyszerűsítsük: $\sqrt{8} \cdot \sqrt[4]{4}$; $(\sqrt[n]{x})^{n^2-1}$; $(x^1)^2(x^2)^2 \dots (x^n)^2$; $x^{1^2}x^{2^2} \dots x^{n^2}$. Nehezebb kérdés: fel tudjuk-e írni az utolsó képletben az x kitevőjét zárt alakban?

3. Oldjuk meg az $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ és $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ egyenleteket.

4. Alakítsuk szorzattá az $a^3 + b^3$ kifejezést. Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét:

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}, \quad \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2}}, \quad \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}, \quad \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}.$$

5. **(K1.2.4)** Alakítsuk szorzattá az $x^2 - 8x + 15$ kifejezést. Adjuk meg az $u + v = 8$, $uv = 15$, majd az $u + v = 14$, $uv = 49$ egyenletrendszer **összes** valós megoldását.

6. (*) Alakítsuk szorzattá az $x^4 + 4$ kifejezést.

7. Végezzük el az alábbi műveleteket a polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát: $(x^3 + 3x^2 + 2) - (x^3 + 3x - 4)$, $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 3)$.

8. Mi lesz a 20-adfokú tag együtthatója a $(2x^{10} + x^5 - 1)(x^{20} + x^{15} - x^7 + 3x)$ polinomban?

9. Egy tizedfokú és egy n -edfokú polinom összege ötödfokú. Mik n lehetséges értékei?

10. (*) Igazoljuk, hogy $x \mapsto \sin(x)$, illetve $x \mapsto 1/x$ ($x \neq 0$) nem polinomfüggvény.

11. Emeljük ki az $x - 1$ gyöktényezőt az $x^3 - 7x + 6$ polinomból, majd határozzuk meg az összes gyökét.

12. **(2.4.14)** A Horner-elrendezés segítségével döntsük el, hogy az $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel $f(x)$ -et $(x - 2)g(x) + f(2)$ alakban.

13. Iterált Hornerrel írjuk fel az $f(x) = 2x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x - 3$ polinomot $(x - 1)$ polinomjaként, azaz keressük meg azt a $g(x)$ polinomot, melyre $f(x) = g(x - 1)$.

14. **(2.4.16)** Az n -edfokú $f(x)$ polinomba behelyettesítjük a b számot. Hány szorzásra van szükség $f(b)$ kiszámításához, ha egyáltalán nem trükközünk; ha a b hatványait előre kiszámoljuk; ha a Horner-elrendezést használjuk?

15. **(2.4.20*)** Van-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$, melyre $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ és $f(18) = 520$?

16. **(2.4.26*)** Ha az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom négy különböző egész helyen is felveszi az 5 értéket, akkor felveheti-e egy egész helyen a 12-t?

17. **(2.5.11)** Hányszoros gyöke az $x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az 1? (Iterált Horner).

18. Adjunk példát olyan 1640 fokú polinomra, melynek az 1 pontosan tízszeres, a -1 pedig pontosan 20-szoros gyöke.

19. Ha az 1 (pontosan) ötszörös gyöke f -nek és hatszoros gyöke g -nek, akkor hányszoros gyöke $f + g$ -nek, illetve $f + g + fg$ -nek?

20. Igazoljuk, hogy $x^2 + bx + c$ -nek pontosan akkor van kétszeres gyöke, ha $b^2 = 4c$.

21. Ha egy harmadfokú polinomnak van kétszeres gyöke, akkor hány (valós) gyöke van? Hány valós gyök lehet, ha a polinom negyedfokú?

22. (*) Mutassuk meg, hogy az $x^3 + px + q$ polinomnak akkor és csak akkor van legalább kétszeres gyöke, ha $27q^2 + 4p^3 = 0$.

23. (*) Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=0}^n x^k/k!$ polinomnak nincs többszörös gyöke.

24. **(3.3.16)** Adjuk meg a $2x^3 + 3x + 5$ polinom racionális gyökeit.

25. Határozzuk meg azt a c számot, melyre a $6x^4 + x^3 + 23x^2 + 4x + c$ polinomnak gyöke az $1/3$, majd írjuk föl gyöktényezős alakban a kapott polinomot.

26. (*) Legyen $f(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$. Írjuk föl $f(x)/x^2$ -et $x + (1/x)$ polinomjaként, majd keressük meg a gyökeit.

27. (*) Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ páros fokú polinom, amely „feje tetejére állítva is önmaga”, azaz $a_i = a_{n-i}$ minden $0 \leq i \leq n$ esetén, és $a_0 \neq 0$. Mutassuk meg, hogy $f(x)/x^{n/2}$ felírható $x + (1/x)$ polinomjaként.

28. **(3.5.8*)** Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$, ahol a_0 és a_n nem nulla, és $g(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_0x^n$. Igazoljuk, hogy a g polinom \mathbb{R} -beli gyökei pontosan az f gyökeinek a reciprokai (multiplicitással számolva is).

29. (**) Hány hárommal **nem** osztható együtthatója van az $(x + 1)^{730}$ polinomnak?