Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

A 25. és 26. előadás-diához tartozó feladatsor

1. ***(1.5.15)*** Az 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi)+i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°)+i\sin(336°)$ számoknak mennyi a rendje? Melyek egységgyökök? Mely n-ekre lesznek ezek a számok n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök?

2. ***(1.5.18)*** Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $o(-i\varepsilon)$?

3. ***(1.5.17)*** Mutassuk meg, hogy ha $n>0$ egész, $\varepsilon\in\mathbb{C}$, és $\varepsilon^n=i$, akkor $4\mid o(\varepsilon)\neq\infty$.

4. ***(1.5.19)*** Ha ε rendje osztható néggyel, mi lesz $-\varepsilon$ rendje?

5. ***(1.5.20)*** Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?

6. ***(1.5.21)*** Legyenek m és n pozitív egészek. Mik $x^n=1$ és $x^m=1$ közös gyökei? Igazoljuk, hogy egy m-edik és egy n-edik egységgyök szorzata mn-edik egységgyök. Milyen (m,n) párokra lesz egy primitív n-edik és egy primitív m-edik egységgyök szorzata primitív mn-edik egységgyök? Hozzuk ki ebből, hogy az Euler-függvény multiplikatív.

7. ***(2.5.12)*** Mutassuk meg, hogy ha két n-edfokú polinom n helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők. Írjuk fel x^n-1 gyöktényezős alakját.

8. ***(2.5.15*)*** Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.

---

9. ***(3.9.4, 3.9.11)*** Számítsuk ki Φ_{12}-t és a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.

10. ***(3.9.18)*** Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával a 12-edik, a 18-adik illetve a 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát.

11. ***(3.9.12)*** Igazoljuk, hogy ha $n>1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x)=\Phi_n(-x)$.

12. ***(3.9.15*)*** Legyenek $m\mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x)=\Phi_m(x^{n/m})$.

13. ***(3.9.16)*** Számítsuk ki az előző feladat alapján a $\Phi_n(x)$-et, ha $n=36,72,144,100$.

14. ***(**)*** Van-e olyan n, melyre $\Phi_n(x)$-nek van 1-nél nagyobb abszolút értékű együtthatója?

15. ***(3.9.14**)*** Bizonyítsuk be, hogy $\Phi_n(x)=\prod_{d\mid n}(x^{n/d}-1)^{\mu(d)}$, ahol μ a Möbius-függvény.

16. ***(3.9.19, 3.20**)*** Mennyi $\Phi_n(1)$, illetve $\Phi_n(-1)$?

17. ***(3.9.21**)*** Igazoljuk, hogy ha m és n relatív prímek, akkor $\Phi_{mn}(x)=\prod_{o(\eta)=m}\Phi_n(\eta x)$, kivéve az $m=2$, $n=1$ esetben, amikor a két oldal egymás ellentettje.

18. ***(3.9.23**)*** Legyen p prímszám, és $n=p^k m$, ahol már $p\nmid m$. Mutassuk meg, hogy modulo p a Φ_n egyenlő a $\Phi_m^{\varphi(p^k)}$ polinommal.

19. ***(3.9.25**)*** Igazoljuk, hogy a Φ_n polinom egy alkalmas eltoltjára akkor és csak akkor teljesül a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltétele, ha n prímhatvány, vagy egy páratlan prímhatvány kétszerese.

20. ***(3.9.26***)*** Mely $n\geq 3$ egészekre létezik olyan n-szög a síkon, amelynek minden szöge egyenlő, és az oldalai valamilyen sorrendben $1,2,\dots,n$ egység hosszúak?