Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

Az 21., 22. és 23. előadás-diához tartozó feladatsor

1. ***(2.5.7)*** Számítsuk ki x alábbi két polinomjának az együtthatóit: $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$ és $c(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)$.

2. ***(2.5.14)*** Határozzuk meg a $2x^4+2x+3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.

3. ***(2.5.15)*** A gyökök és együtthatók összefüggése alapján számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát.

4. ***(2.7.16)*** Legyenek a, b, c az x^3+3x+1 polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a+b$, $a+c$, $b+c$.

5. ***(2.7.15, HF)*** Határozzuk meg az x^n+x+1 polinom (komplex) gyökeinek négyzetösszegét, köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \geq 2$).

6. Fejezzük ki a másodfokú egyenlet együtthatóival a gyökök különbségének négyzetét.

---

7. ***(3.2.16)*** Osszuk el maradékosan az x^3-2 polinomot $2x^2+2x-3$-mal.

8. ***(3.2.23)*** Mi a maradék, ha x^4+x^2+1-et osztjuk x^2+x+1-gyel? Az eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is, majd vizsgáljuk meg, hogy $x^{2n}+x^n+1$ mikor osztható x^2+x+1-gyel.

9. ***(3.2.24)*** Mi a maradék, ha $x^{64}+x^{54}+x^{14}+1$-et osztjuk x^2+1-gyel, illetve x^2-1-gyel?

10. Az $f(x):(x^2+1)$ maradékos osztásnál a maradék $x+1$. Határozzuk meg $f(i)$ értékét.

11. ***(3.2.17)*** Állapítsuk meg az $f(x)=3x^3+6x^2+6x+3$ és a $g(x)=2x^4+2x^2+2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal.

12. Mi lesz x^5+1 és $x^{15}-1$ legnagyobb közös osztója?

13. ***(3.3.15)*** Mi lesz x^n-1 és x^m-1 legnagyobb közös osztója?

14. ***(2.5.11)*** Határozzuk meg x^4-x^3-x+1 többszörös gyökeit a deriváltjának a segítségével.

15. ***(3.6.7)*** Határozzuk meg $x^6+x^5+5x^4+4x^3+8x^2+4x+4$ többszörös komplex gyökeit.

16. ***(3.6.11*)*** Melyek azok a polinomok, amelyek oszthatók a deriváltjukkal?

17. ***(*)*** Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ polinomnak nincs többszörös gyöke.

---

18. ***(2.4.14, HF)*** Adjunk meg a Lagrange- és a Newton-interpoláció segítségével is olyan legfeljebb harmadfokú polinomot, amelyre $f(0)=3$, $f(1)=3$, $f(4)=15$ és $f(-1)=0$. Mutassuk meg Vandermonde-determináns felhasználásával, hogy az interpoláció mindig elvégezhető (a lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek a keresett polinom együtthatói).

19. ***(2.4.22)*** Tegyük föl, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom minden racionális/valós helyen racionális/valós értéket vesz föl. Következik-e ebből, hogy f racionális/valós együtthatós?

20. ***(2.6.11**)*** Általánosítsuk az interpolációt többhatározatlanú polinomokra. Mutassuk meg, hogy véges test esetében minden véges sok változós függvény polinomfüggvény.

21. ***(2.4.21**)*** Igazoljuk, hogy n egész alappont és egész értékek esetén akkor és csak akkor van egész együtthatós interpolációs polinom, ha az egyértelműen meghatározott legfeljebb $n-1$-ed fokú racionális együtthatós interpolációs polinom egész együtthatós.

22. ***(2.4.24**)*** Tegyük föl, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom foka n, és $n+1$ egymást követő egész helyen egész értéket vesz föl. Igazoljuk, hogy léteznek olyan $c_0, \ldots, c_n$ egész számok, hogy

$$f(x) = c_n \binom{x}{n} + \ldots + c_0 \binom{x}{0}, \quad \text{ahol} \quad \binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\ldots(x-j+1)}{j!}.$$

---

23. ***(3.3.16)*** Adjuk meg az összes olyan tizenkettedfokú valós együtthatós polinomot, melynek az $1+i$ hatszoros gyöke.

24. Egy valós együtthatós, normált, harmadfokú polinomnak gyöke az $1+i$ és a konstans tagja 2. Mi a másik két gyöke?

25. ***(3.3.13)*** Bontsuk föl a következő polinomokat az $\mathbb{R}$ fölött irreducibilis polinomok szorzatára: $x^4-1,\ x^4+1,\ x^4+9,\ x^6-4x^3+3$.

26. ***(*)*** Hány komplex, illetve valós fölött irreducibilis polinom szorzatára bomlik az x^n+x+1 polinom $(n \geq 2)$?

27. Bontsuk a $2x^4-4$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}$ fölött.

28. Bontsuk az $x^{12}-4096$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben.

---

29. ***(3.3.21)*** Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.

30. ***(3.9.22)*** Bontsuk az $x^{12}-1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ felett.