Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

A 18. előadás-diához tartozó feladatsor

1. Lineárisan függetlenek-e (külön-külön) az alábbi mátrixok oszlop-, illetve sorvektorai? Mindegyik mátrixban adjunk meg annyi lineárisan független oszlopot, ahányat csak lehet, az összes lehetséges módon. Határozzuk meg a mátrixok sor-, illetve oszloprangját.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&4&6\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

2. Igazoljuk az alábbiakat. Ismerünk-e hasonlót egy determináns oszlopairól?

(1) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
(2) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$. Mikor lesz független $\{v, w\}$?
(3) Ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ független, akkor $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ is független. Általánosítsunk!

3. Tegyük fel, hogy az a, b, c, d vektorokra $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d-t.

4. Mely n-ekre igaz a következő állítás: ha $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ lineárisan függetlenek, akkor $v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$ is függetlenek. Mi a helyzet $\mathbb{Z}_2^n$-ben?

5. Van-e három olyan vektor $\mathbb{R}^2$-ben, melyek három darab kételemű részhalmaza közül rendre 1, 2, 3 független? Van-e négy olyan vektor $\mathbb{R}^3$-ben, melyek négy darab háromelemű részhalmaza közül rendre 1, 2, 3, 4 független? És ha a vektorok egyike sem nulla?

6. Tegyük föl, hogy létezik az AB mátrixszorzat. Mely állítások igazak az alábbiak közül?

(1) AB oszlopvektorai az A oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
(2) AB oszlopvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.
(3) AB sorvektorai a B sorvektorainak lineáris kombinációi.
(4) AB sorvektorai a B oszlopvektorainak lineáris kombinációi.

7. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ tetszőleges adott mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(1) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van a 0-tól különböző (azaz *nem triviális*) megoldása.
(2) Ha az A sorai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = 0$ egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.
(3) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek egynél több megoldása van.
(4) Ha az A oszlopai lineárisan összefüggnek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek nem lehet egyértelmű a megoldása.

8. ***(*)*** Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 13×21-es 8 rangú valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” A királylány tudja az algebrát, mi lett a sorsa?

A sárkány a királylány húgához is bement. „Neked egy 8 rangú 8×8-as M mátrixot kell most felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát M-et már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” A királylány húga életben maradt-e?