Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

Az 1. előadás-diához tartozó feladatsor

1. Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek **általános** megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x \quad\quad + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned}$$

HF:

$$\begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x \quad\quad\quad + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

2. Az alábbi táblázat celláiba írjunk be egy-egy megfelelő n ismeretlenes, m egyenletből álló (minél egyszerűbb) $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges), illetve N betűt, ha a megfelelő eset nem fordulhat elő.

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

3. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

$$\begin{aligned} -x + 3y + 3z &= 2 \\ 3x + y + z &= 4 \\ 2x - 2y + 3z &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x - y - 2z &= -7 \\ 3x + 2y - z &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x - y - 2z &= -7 \\ 3x + 2y - z &= 4 \end{aligned}$$

4. Mely valós c-re hány valós megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? A $c = 2$ esetben adjuk meg z értékét annál a megoldásnál, melynél az xy szorzat maximális:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & & y & - & cz & = & -1 \\ x & + & cy & - & 2z & = & -1 \end{array}$$

5. Adott 1849 szám úgy, hogy közülük bármely 1848 összege 1849. Melyek ezek a számok?

6. ***(*)*** A

$$\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerben a változók mely halmazai játszhatják a szabad változók szerepét?

7. ***(*)*** Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?

8. ***(*)*** Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszernek az összes $\mathbb{R}$-beli megoldása racionális szám. Szükségképpen racionálisak-e az együtthatók? Hány megoldása lehet $\mathbb{C}$ felett?

9. ***(*)*** Vegyük egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszer összes lehetséges megoldásában előforduló x_1 értékek H halmazát. Bizonyítsuk be, hogy H vagy az üres halmaz, vagy egyelemű, vagy egyenlő a $\mathbb{R}$-rel.