

Matematikus és alkalmazott matematikus MSc

Szakdolgozati témajavaslatok

2022/2023

Algebra és Számelmélet Tanszék

Természetesen nemcsak a felsorolt témákról lehet szakdolgozatot írni: a témavezetővel való személyes egyeztetés után egyéb témakörök is szóba jöhetnek.

1. Téma: Algebrák reprezentációdimenziója

Témavezető: Ágoston István

Rövid leírás: Auslander az 1970-es évek elején vezette be az algebrák reprezentációdimenziójának fogalmát: ez a dimenzió homológikus eszközökkel méri azt, hogy egy algebra milyen messze van a reprezentációvégtől. Auslander bizonyította, hogy egy algebra pontosan akkor reprezentációvéges, ha $\text{rep.dim } A \leq 2$. Sokáig nem volt ismeretes, hogy $\text{rep.dim } A$ mindig véges-e; ezt Iyama bizonyította egy 2003-as cikkében. Igusa és Todorov 2005-ben megmutatták, hogy ha egy algebra reprezentációdimenziója legfeljebb 3, akkor a finitistikus dimenziója véges (általános véges dimenziós algebrákra ez a homológikus algebra egyik legismertebb megoldatlan sejtése). Sajnos, ezzel lényegében egyidőben (2006-ban) Rouquier mutatott példát olyan algebrákra, melyek reprezentációdimenziója 4 (ezt megelőzően ilyen példa sem volt ismeretes). Azóta számos eljárás született nagy dimenziójú algebrák konstruálására, de a finitistikus dimenzióval való kapcsolat még számos kiderítenivalót rejt, s a fogalom kutatása meglehetősen nyitott.

Ajánlott irodalom:

- [1] M. Auslander: Representation dimension of Artin algebras. *Queen Mary College Mathematics Notes, London*. (1971)
- [2] O. Iyama: Finiteness of representation dimension. *Proc. Am. Math. Soc.* **131** (2003), 1011–1014.
- [3] K. Igusa, G. Todorov: On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras. *Repr. of Algebras and Related Topics*. Am. Math. Soc. (2005), 201–204.
- [4] R. Rouquier: Representation dimension of exterior algebras. *Invent. Math.* **165** (2006), 357–367.
- [5] S. Opperman: A lower bound for the representation dimension of kC_p^n . *Math. Z.* **256** (2007), 481–490.

Szak: matematikus

2. Téma: Korrelációs egyenlőtlenségek a többdimenziós normális eloszlásra

Témavezető: Frenkel Péter

Rövid leírás: Negyven évig nyitott sejtés volt, hogy a többdimenziós normális eloszlásra nézve bármely két centráliszimmetrikus konvex halmaz nemnegatívan korrelált. Néhány

évvel ezelőtt Thomas Royen nyugdíjas statisztikaprofesszor ezt bebizonyította. Az eredeti cikk nehezen olvasható, de Franck Barthe lepárolt belőle egy nagyon világos leírást. Az alábbi irodalomjegyzékben lévő másik cikk egy másfajta, kettőnél több tényező korrelációs egyenlőtlenséget tárgyal a többdimenziós normális eloszlásra vonatkozóan. Ezeket és más kapcsolódó cikkeket lehetne feldolgozni a diplomamunkában.

Ajánlott irodalom:

- [1] Franck Barthe: *L'infégalité de corrélation gaussienne [d'après Thomas Royen]*, Séminaire BOURBAKI 69^{ème} année, 2016-2017, no 1124,
<https://www.bourbaki.fr/TEXTES/1124.pdf>
- [2] P.E. Frenkel: *Pfaffians, Hafnians and products of real linear functionals*. Math. Res. Lett. 15 (2008), no. 2, 351-358., arXiv:0704.0028

Szak: matematikus

3. *Téma: Pszeudovéletlen bináris sorozatok és rácsok*

Témavezető: Gyarmati Katalin

Rövid leírás: A kriptográfiában meghatározó szerepet játszó pszeudovéletlen bináris sorozatok és rácsok konstrukciója és tanulmányozása

Ajánlott irodalom:

- [1] A. J. Menezes, P. C. van Oorschot, Scott A. Vanstone, *Handbook of Applied Cryptography*
- [2] C. Mauduit, A. Sárközy, On finite pseudorandom binary sequences. I. Measure of pseudorandomness, the Legendre symbol

Szak: matematikus.

4. *Téma: Eliminációelmélet*

Témavezető: Károlyi Gyula

Rövid leírás: Hogyan lehet szisztematikusan megoldani magasabbfokú egyenletrendszereket? A kérdés minőségi vizsgálata a projektív algebrai geometria eszközeivel.

Ajánlott irodalom:

- [1] D.A. Cox, J.B. Little, D. O'Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms*

Szak: matematikus

5. *Téma: Általános algebrák, hálók*

Témavezető: Kiss Emil

Rövid leírás: Az általános algebráknak az utóbbi évtizedekben mély elmélete alakult ki. Az alapok elsajátítása mellett szabadon lehet választani olyan témákból, mint teljességi kérdések, kommutátorelmélet, kongruenciaszelídítés, a szubdirekt irreducibilis algebrák viselkedése.

Ajánlott irodalom:

- [1] Kiss: *Bevezetés az algebrába*, 8. fejezet
- [2] Hobby–McKenzie: *The structure of finite algebras*

Szak: matematikus

6. *Téma: Szuperszinguláris izogéniagráfok*

Témavezető: Kutas Péter (belső konzulens: Zábrádi Gergely)

Rövid leírás: Egy véges test felett definiált elliptikus görbe szuperszinguláris, ha az endomorfizmusgyűrűje nemkommutatív. Egy izogénia egy olyan morfizmus két elliptikus görbe

között, ami egyben csoport-homomorfizmus is. Ha ℓ egy kicsi prím (tipikusan 2 vagy 3), akkor lehet definiálni a $G(\ell, p)$ *szuperszinguláris izogéniagráfot*, aminek a csúcsai elliptikus görbék izomorfiaosztályai, az élei pedig ℓ -izogéniák. Ez a gráf $(\ell + 1)$ -reguláris, összefüggő expander gráf, amely számos nagyon érdekes tulajdonsággal rendelkezik. Nemrégiben fontos alkalmazásokra lelt a kriptográfiában, többek között a Diffie–Hellman-kulcscsere analógja kapcsán. A szakdolgozó feladata a releváns szakirodalom áttekintése mellett ezeknek a gráfoknak a számelméleti vizsgálata és esetleges kapcsolódó kriptográfiai kérdések megválaszolása lenne.

Ajánlott irodalom:

[1] Luca de Feo: *Mathematics of isogeny based cryptography*, arXiv:1711.04062 12 (2017).

Szak: matematikus

7. Téma: Öröklődő kongruenciahálók

Témavezető: Pálffy Péter Pál

Rövid leírás: Az univerzális algebra talán legnevezetesebb megoldatlan problémája a véges algebrák kongruenciahálóinak jellemzése. Még egyetlen véges hálóról sem sikerült bizonyítani, hogy ne lehetne egy véges algebra kongruenciahálójára, bár vélhetően a hálók nagy része nem áll így elő. Snow a legkisebb moduláris de nem disztributív hálóvarietás véges tagjairól mutatta meg, hogy előállíthatók véges algebrák kongruenciahálóiaként. Ezt Hegedűs és Pálffy általánosították és bevezették az öröklődő kongruenciaháló fogalmát. A szakdolgozat célja ezeknek az eredményeknek a feldolgozása és esetleg további öröklődő kongruenciahálók konstruálása.

Ajánlott irodalom:

[1] Hegedűs Pál és Pálffy Péter Pál, Modular congruence lattices, *Algebra Universalis* **54** (2005), 105–120.

[2] John Snow, Every lattice in $V(M_3)$ is representable, *Algebra Universalis* **50** (2003), 75–81.

Szak: matematikus.

8. Téma: Homogén struktúrák

Témavezető: Szabó Csaba

Rövid leírás: A véletlen gráf mintájára létezik véletlen részbenrendezett halmaz, véletlen lánc és véletlen Abel-csoport is. Ezek az úgynevezett homogén struktúrák modellelméleti és csoportelméleti (végtelen permutációcsoportok) eszközökkel vizsgálhatók.

Ajánlott irodalom:

[1] H.D. Macpherson, A survey of homogeneous structures. *Discrete Mathematics* **311** (2011), 1599–1634

[2] <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~jberger/mac.pdf>

Szak: matematikus

9. Téma: A p -adikus Langlands-program

Témavezető: Zábrádi Gergely

Rövid leírás: A p -adikus csoportok p -adikus reprezentációelmélete a matematika egy viszonylag új, dinamikusan fejlődő ága, melynek komoly alkalmazásai vannak az algebrai számelméletben. A Langlands program arról szól, hogy bizonyos Galois reprezentációknak próbálunk (viszonylag jól meghatározható szisztematikus módon) megfeleltetni bizonyos

automorf reprezentációkat. Az úgynevezett p -adikus Langlands-programban az automorf oldalon a $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ csoport (és további, ennél általánosabb csoportok) p -adikus Banach-tér reprezentációi, a Galois oldalon pedig a $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ abszolút Galois csoportnak p -adikus reprezentációi állnak, ahol $\mathbb{Q}_p$ a p -adikus számok teste, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ pedig annak algebrai lezártja. A szakdolgozat a hallgató érdeklődésétől függően szólhat vagy csak a Galois-oldalról, vagy csak az automorf oldalról, vagy akár ezek kapcsolatáról.

Ajánlott irodalom: angol, ill. francia nyelvű szakcikkek, előadásjegyzetek a szakdolgozó érdeklődésétől függően, többek között:

[1] Pierre Colmez: Représentations de $GL_2(Q_p)$ et (φ, Γ) -modules

[2] Peter Schneider és Jeremy Teitelbaum: Banach space representations and Iwasawa theory

[3] Laurent Berger: Galois representations and (φ, Γ) -modules

Szak: matematikus.