

A BSc-képzés szakdolgozati témái

ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék

2022/2023

BSc szakdolgozati témát a matematika valamely témaköréből vagy annak tanításából lehet választani. A szakdolgozat célja, hogy a hallgató elmélyedjen egy területen és azt a témavezető segítségével feldolgozza. Tipikus szakdolgozati téma lehet egy könyvfejezet megértése feladatok segítségével, vagy egy alkalmazott matematikai feladat megismerése, megoldása. Önálló matematikai eredményeket nem várunk el, önálló munkát azonban igen. Ez nemcsak az irodalom feldolgozását és az anyag megértését jelenti, hanem például önálló feladatmegoldást, feladatok, programok vagy népszerűsítő anyagok készítését is. A dolgozat elvárt terjedelme kb. 25 – 30 oldal.

Szakdolgozati témát (legkésőbb) az ajánlott tanterv szerint haladóknak az 5. félévben október 15-ig kell választani. A tanszékek minden év szeptember közepéig meghirdetik az aktuális szakdolgozati témákat. A leadással kapcsolatos tennivalókról és határidőkről a Matematikai Intézet honlapján olvasható tájékoztató.

A szakdolgozat elkészítésében a hallgatót témavezető(k) segíti(k). A témavezető(ke)t a hallgató az egyetem oktatói és tudományos kutatói közül választhatja ki. Az illetékes tanszékvezető jóváhagyásával külső szakembert is fel lehet kérni témavezetőnek.

A szakdolgozatot a záróvizsgán, a szakdolgozat teljes témájáról folytatott interaktív beszélgetés keretében kell megvédeni. A szakdolgozatra és a védésre a hallgató külön érdemjegyet kap, ezeket a záróvizsga-bizottság állapítja meg. A védelem céljai közé tartozik annak ellenőrzése, hogy a hallgató megfelelő mélységben érti-e a szakdolgozat témájához tartozó alapfogalmakat.

A-Sz.1. Szabadon választható téma.

Témavezető: A tanszék bármelyik oktatója, vagy (a tanszékvezető által jóváhagyott) külső szakember.

A téma rövid leírása: Ha egy hallgató tetszőleges algebrai vagy számelméleti téma iránt érdeklődik, akkor témavezetőnek választhatja azt a szakembert, aki ehhez ért, és ebben segítséget tud neki nyújtani.

Ajánlott irodalom: a hallgató és a témavezető megállapodása alapján.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.2. Példák, konstrukciók a gyűrűk és modulusok elméletében

Témavezető: Ágoston István

A téma rövid leírása: Mutassunk példát olyan gyűrűre, ami minimufeltételes a balideálokra, de nem minimumfeltételes a jobbideálokra. Mutassunk példát olyan gyűrűre, amely bal-primitív, de nem jobb-primitív. Mutassunk példát olyan modulusra, amely nem bontható direkt fölbonthatatlan modulusok direkt összegére. – A szakdolgozatban néhány érdekes példát lehetne az irodalom alapján földolgozni: a példák, konstrukciók és a lehetséges érdekes kérdések tárháza szinte kimeríthetetlen (lásd pl. a <https://math.stackexchange.com> fórumait).

Ajánlott irodalom: Pl. <https://www.ams.org/journals/proc/1964-015-03/S0002-9939-1964-0167497-4/S0002-9939-1964-0167497-4.pdf>

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.3. A Hilbert-féle nullhelytétel bizonyításai és alkalmazásai.

Témavezető: Frenkel Péter

A téma rövid leírása: Hilbert nullhelytétele (Nullstellensatz) alapvető kapcsolatot teremt a kommutatív algebra és az algebrai geometria között. A tételnek számos bizonyítása és rengeteg alkalmazása ismeretes (például egy invariáns-elméleti alkalmazás, amely David Hilbert eredeti motivációja volt). Ezek egy részét lehetne áttekinteni a diplomamunkában.

Ajánlott irodalom: Eisenbud, David: *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*

Ajánlott szakirányok: matematikus, alkalmazott matematikus.

A-Sz.4. Kölcsönösen torzítatlan bázisok.

Témavezető: Frenkel Péter

A téma rövid leírása: Egy véges dimenziós komplex euklideszi tér két ortonormált bázisa egymásra nézve torzítatlan, ha egy-egy vektort véve belőlük,

ezek skaláris szorzatának abszolút értéke nem függ a vektorok választásától. Fontos, nehéz, sokat kutatott kérdés, hogy adott dimenzióban legfeljebb hány, páronként torzítatlan ortonormált bázis adható meg. Ez összefügg kvantum-információelmélettel, véges testekkel, latin négyzetekkel, véges geometriákkal.

Ajánlott irodalom: Thomas Durt, Berthold-Georg Englert, Ingemar Bengtsson, Karol Życzkowski, *On mutually unbiased bases*, Int. J. Quantum Information 8 (2010) 535–640, arXiv:1004.3348.

Ajánlott szakirányok: matematikus, alkalmazott matematikus.

A-Sz.5. A Capelli-azonosság.

Témavezető: Frenkel Péter

A téma rövid leírása: A Capelli-azonosságra a determinánsok szorzástételének egyfajta "kvantum-változataként" gondolhatunk. Fontos szerepet játszik a klasszikus mátrixcsoportok invariánselméletének Hermann Weyl-féle klasszikus felépítésében. Van klasszikus mátrixalgebrai, reprezentációelméleti és elemi kombinatorikus bizonyítása, valamint számos érdekes és fontos analogonja, változata.

Ajánlott irodalom: H. Weyl: *The classical groups — their invariants and representations*; R. Goodman, N. R. Wallach: *Representations and invariants of the classical groups*; D. Foata, D. Zeilberger: *Combinatorial proofs of Capelli's and Turnbull's identities from classical invariant theory*, The Electronic Journal of Combinatorics, 1994.

Ajánlott szakirányok: matematikus

A-Sz.6. Sidon sorozatok.

Témavezető: Gyarmati Katalin

A téma rövid leírása: Sidon-sorozatnak vagy Sidon-halmaznak nevezzük természetes számoknak egy $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ véges vagy végtelen sorozatát, ha az A elemeiből képzett valamennyi kéttagú $a_i + a_j$ ($i \leq j$) összeg különböző.

Ajánlott irodalom: O'Bryant, K. (2004), *A complete annotated bibliography of work related to Sidon sequences*, Electronic Journal of Combinatorics 11: 39, <http://www.emis.ams.org/journals>.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.7. Additív és multiplikatív problémák.

Témavezető: Gyarmati Katalin

A téma rövid leírása: A témakörben bármilyen egész számokból álló halmazok összegére, szorzatára vonatkozó téma belefér.

Ajánlott irodalom: K. Gyarmati, *On a problem of Diophantus*, Acta Arith. 97.1 (2001), 53-65.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.8. Pszeudovéletlen objektumok.

Témavezető: Gyarmati Katalin

A téma rövid leírása: Az ókortól kezdve napjainkig a véletlengenerálás mindig fontos szerepet játszott. De mi is az a véletlenszám generálás? Az általunk használt módszerek valóban véletlen számokat állítanak-e elő? Ebben a témakörben számítógép által generálható pszeudovéletlen objektumokat fogunk tanulmányozni.

Ajánlott irodalom: C. Mauduit, A. Sárközy, *On finite pseudorandom binary sequence I: Measures of pseudorandomness, the Legendre symbol*, Acta Arith. 82 (1997), 365-377.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.9. Struktúrák sok szimmetriával

Témavezető: Halasi Zoltán

A téma rövid leírása: Jól ismert, hogy tetszőleges véges csoporthoz lehet olyan véges gráfot készíteni, melynek automorfizmuscsoportja izomorf a kiindulási csoporttal. Ezzel szemben véletlenszerűen választva egy gráfot, annak automorfizmus csoportja jó eséllyel kicsi lesz. Célunk olyan gráfok, vagy egyéb véges struktúrák keresése, melyek sok szimmetriával bírnak.

Ajánlott irodalom: A. E. Brouwer, A. M. Cohen A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*.

Ajánlott szakirányok: mindegyik

A-Sz.10. Klasszikus csoportok.

Témavezető: Halasi Zoltán

A téma rövid leírása: A véges egyszerű csoportok klasszifikációjából tudjuk, hogy — az alternáló csoporttól, illetve 26 spóradikus csoporttól eltekintve — egy véges nemkommutatív egyszerű csoport Lie típusú, azaz valamiképpen kapcsolódik valamely komplex test feletti egyszerű Lie algebrához. Ezen csoportok egy alosztályát alkotják a klasszikus csoportok. A szakdolgozat célja összefoglalást nyújtani ezen csoportok illetve a kapcsolódó Lie algebrák szerkezetéről különféle testek felett.

Ajánlott irodalom: J. E. Humphreys: *Introduction to Lie algebras and representation theory*; A. W. Knap, *Lie Groups beyond an Introduction*

Ajánlott szakirányok: matematikus

A-Sz.11. Véges testekre alapuló konstrukciók

Témavezető: Károlyi Gyula

A téma rövid leírása: Számos olyan extrémális probléma van a számelmélet és a kombinatorika területén, ahol nagy struktúrák megtalálásában segítségünkre lehetnek a véges testek. A szakdolgozatban néhány ilyen kérdést (pl. Sidon-sorozatok, Van der Waerden tétele) járunk körül.

Ajánlott irodalom: Freud R. és Gyarmati E.: *Számelmélet, 2. kiadás*, Hraskó A.: *Új matematikai mozaik*

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.12. Egyenletes eloszlás és diszkrepancia

Témavezető: Károlyi Gyula

A téma rövid leírása: Mit jelent az, hogy egy sorozat vagy egy véges halmaz pontjai egyenletesen oszlanak el a $[0,1]$ intervallumban, vagy annak egy magasabb dimenziós megfelelőjében? Hogyan lehet és érdemes mérni azt, hogy egy ilyen ponthalmaz mennyire egyenletes eloszlású? Hogyan lehet minél jobb sorozatokat készíteni, és hogyan alkalmazhatóak ezek többváltozós függvények numerikus integrálására? A konstrukciók megtalálásához a számelmélet és az algebra segít, az alkalmazhatóság határainak feszegetéséhez pedig tipikusan az analízis eszközeit használjuk.

Ajánlott irodalom: J. Beck and W.W.L. Chen: *Irregularities of Distribution*, J. Matoušek: *Geometric Discrepancy*, B. Chazelle: *The Discrepancy Method: Randomness and Complexity*

Ajánlott szakirányok: alkalmazott matematikus, matematikus.

A-Sz.13. A kombinatorikus nullhelytétel változatai és alkalmazásai

Témavezető: Károlyi Gyula

A téma rövid leírása: A cél annak vizsgálata, hogyan lehet a nullhelytétel különböző változatait alkalmazni a kombinatorikus számelméletben, a gráfelméletben, illetve az algebrai kombinatorikában.

Ajánlott irodalom: a témához kapcsolódó angol nyelvű szócikkek.

Ajánlott szakirányok: alkalmazott matematikus, matematikus.

A-Sz.14. Versenyfeladatok az általános- és középiskolában.*Témavezető:* Kiss Emil**A téma rövid leírása:** A cél bizonyos (elsősorban algebrahoz kapcsolódó) témákból vagy adott megoldási módszert használó feladatok gyűjtése, rendszerezése, többféle megoldása, általánosítása, hasonló feladatok készítése.**Ajánlott irodalom:** versenyfeladatok gyűjteményei, Középiskolai Matematikai Lapok.**Ajánlott szakirányok:** mindegyik.**A-Sz.15. Általános algebrák, hálók.***Témavezető:* Kiss Emil**A téma rövid leírása:** Az általános algebráknak az utóbbi évtizedekben mély elmélete alakult ki. Az alapok elsajátítása mellett szabadon lehet választani olyan témákból, mint teljességi kérdések, kommutátorelmélet, kongruenciaszeledítés, a szubdirekt irreducibilis algebrák viselkedése.**Ajánlott irodalom:** Kiss: *Bevezetés az algebraiba*, 8. fejezet, Hobby–McKenzie: *The structure of finite algebras*.**Ajánlott szakirányok:** matematikus.**A-Sz.16. Kockák és kvaterniók.***Témavezető:* Kiss Emil**A téma rövid leírása:** Az alábbi cikkben a szerzők az egész kvaterniók számelméletét használják fel térbeli, egész koordinátájú vektorokból képzett négyzet- és kockarácsok vizsgálatára. A témához kapcsolódik a négy négyzetszám összegére való felbontások számának megállapítása, valamint a pitagoraszi számnégyesek megértése is. Az eredmények esetleg továbbfejleszthetők magasabb dimenziókban.**Ajánlott irodalom:** Rédei: *Algebra*, Goswick–Kiss–Moussong–Simányi: *Sums of squares and orthogonal integral vectors*.**Ajánlott szakirányok:** matematikus.**A-Sz.17. Abel-csoportok.***Témavezető:* Kiss Emil**A téma rövid leírása:** Az Abel-csoportok algebrailag jól viselkedő osztályt alkotnak, ezért a példájukon könnyen megérthetőek olyan általánosabb moduluselméleti fogalmak, mint a direkt felbontások létezése, injektivitás, projekтивitás, tenzorszorzat.

Ajánlott irodalom: Kiss: *Bevezetés az algebrába*, 7. fejezet, L. Fuchs: *Infinite Abelian groups*.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

A-Sz.18. Magyar matematikusok a huszadik században.

Témavezető: Pálffy Péter Pál

A téma rövid leírása: Egy — választás szerinti — magyar matematikusnak a Rényi Intézet könyvtárában őrzött hagyatékának (levelezés, kéziratok, különlenyomatok) feldolgozása.

Ajánlott irodalom: Horváth János (szerk.): *Panorama of the Hungarian Mathematics in the Twentieth Century*.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.19. Szimmetriacsoportok.

Témavezető: Pálffy Péter Pál

A téma rövid leírása: A csoportelmélet a szimmetriák absztrakt matematikai elmélete. Síkbeli, illetve térbeli szimmetriacsoportok megjelennek a díszítőművészetekben és a kristálytanban is. A lehetséges szimmetriacsoportok leírása jól ismert matematikai eredmény. A szakdolgozat témája a bizonyítás bemutatása, valamint az eredmény illusztrálása lehet.

Ajánlott irodalom: H. Weyl: *Szimmetria*.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.20. Gráfok izomorfizmus-problémája algebrai eszközökkel

Témavezető: Somlai Gábor

A téma rövid leírása: A gráfok izomorfizmus problémájának komplexitása nem ismert. A szakdolgozat célja egy speciális gráfosztályra a probléma bemutatása lehet. Ezek egyike a Cayley gráfok izomorfizmus problémája. Itt a cél az, hogy kizárólag a csoport automorfizmus csoportjának vizsgálatával, amiből a gráfot konstruáltuk, el tudjuk dönteni, mikor izomorf két Cayley gráf. Egy másik ettől eltérő, de algebrai eszközöket használó eset, a kompakt gráfoké. Az egész témakör Birkhoff azon tételén alapul, ami azt mondja, hogy a duplán sztochasztikus mátrixok előállnak, mint a permutációmátrixok konvex kombinációi. Ez a jelenség a szimmetrikus csoport nyelvén megfogalmazva rögtön algebrai problémákhoz vezet.

Ajánlott irodalom: C. H. Li, *On Cayley isomorphism of finite Cayley graphs. A survey*, V. Arvind, Johannes Köbler, Gaurav Rattan, Oleg Verbitsky: *Graph Isomorphism, Color Refinement, and Compactness*.
Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.21. Erdős-Ko-Rado tétel algebrai változata

Témavezető: Somlai Gábor

A téma rövid leírása: Az Erdős-Ko-Rado tétel a kombinatorika egyik alapvető tétele. Ezt a tételt több különböző kontextusban próbálták általánosítani. Hasonló kérdéseket próbáltak megfogalmazni például a csoportelmélet nyelvén. Ezek újabb eszközöket is adtak az eredeti tétel belátására. A szakdolgozat célja ezen kérdések és új módszerek közül néhány áttekintése lehetne.

Ajánlott irodalom: Cameron, Ku: *Intersecting families of permutations*, Godsil, Meagher: *A new proof of the Erdős–Ko–Rado theorem for intersecting families of permutations*, P. Frankl, R. L. Graham: *Old and new proofs of the Erdős–Ko–Rado Theorem*.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.22. Cowen-Meyerowitz sejtés

Témavezető: Somlai Gábor

A téma rövid leírása: Az egész számok egy alkalmas véges halmaz eltoltjával néha parkettázhatóak. A parkettázás mindig periodikus abban az értelemben, hogy az egész számok minden parkettázása visszavezethető egy alkalmas véges ciklikus csoport parkettázására. Felmerül a kérdés, hogy ezeket leírjuk. Ezzel kapcsolatos a Cowen-Meyerowitz sejtés, ami négyzetmentes ciklikus csoportokra azt mondja, hogy minden parkettázó halmaz egy alkalmas részcsoporthoz minden mellékosztályával pont egy közös eleme van. A szakdolgozat ezt és a Fugelee sejtést járja körül, lehetőséget biztosítva egyszerű, még nem ismert esetek átgondolására, esetleg számítógéppel történő ellenőrzésére

Ajánlott irodalom: <https://arxiv.org/pdf/math/9802122.pdf>

Ajánlott szakirányok: matematikus, alkalmazott matematikus

A-Sz.23. Műveletekkel megadott homogén struktúrák.

Témavezető: Szabó Csaba

A téma rövid leírása: Azon algebraosztályokat vizsgáljuk, amelyek tartalmazzanak úgynevezett homogén algebrát. Elsősorban az automorfizmus csoportra és annak supercsoportjaira vagyunk kíváncsiak, de a műveleti redukciókat is vizsgáljuk.

Ajánlott irodalom: Cikkek.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

A-Sz.24. CSP versus univerzális algebra.

Témavezető: Szabó Csaba

A téma rövid leírása: Az utóbbi időben az úgynevezett reláció homomorfizmus probléma bonyolultságának eldöntése az érdeklődés központjába került. Ide tartozik például a gráfok retrakciója is. Kiderült, hogy a kérdés átfogalmazható a relációkat megtartó algebraik nyelvére. Ezt az összefüggést próbáljuk megérteni a dolgozatban.

Ajánlott irodalom: *különböző jegyzetek.*

Ajánlott szakirányok: matematikus, alkalmazott matematikus.

A-Sz.25. A Hasse becslés elliptikus görbék mod p pontjainak számára.

Témavezető: Zábrádi Gergely

A téma rövid leírása: Legyen p egy prímszám és E egy elliptikus görbe a p elemű \mathbb{F}_p test fölött, azaz (ha $p > 3$, akkor) egy $y^2 = x^3 + ax + b$ egyenletű síkgörbe, ahol $p \nmid 4a^3 + 27b^2$. Hasse 1936-os becslése ekkor úgy szól, hogy az E görbe pontjainak a száma az \mathbb{F}_p fölötti projektív síkon $p + 1 - a_p$, ahol $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$. A bizonyítás – az ennél jóval általánosabb Weil-sejtésekével ellentétben – viszonylag elemi, csak az elliptikus görbék aritmetikáját használja, amihez minimális algebrai geometriai előkészítés szükséges. A cél ennek a tételnek igazolása lenne és esetleg néhány alkalmazás bemutatása.

Ajánlott irodalom: J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Springer, 1986.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

A-Sz.26. A moduláris görbék

Témavezető: Zábrádi Gergely

A téma rövid leírása: A moduláris görbék a komplex felső félsík hányadosai az $SL_2(\mathbb{Z})$ csoport bizonyos kongruenciárcsoportjainak a hatására nézve. A priori ezek nemkompakt Reimann-felületek, melyeket véges sok pont (az ún. csúcok) hozzáadásával lehet kompaktifikálni. Az alkalmazások szempontjából viszont kiemelten fontos, hogy a moduláris görbék egyben *algebrai görbék* is, melyeket racionális együtthatós polinomokkal is meg lehet adni. Sőt, amennyiben a kongruenciárcsoport a

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

akkor az $Y_0(N) = \Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$ moduláris görbe racionális (vagy általánosabban tetszőleges 0-karakterisztikájú K test fölötti) pontjai parametrizálják az (E, S) rendezett párokat, ahol E egy \mathbb{Q} (ill. K) fölötti elliptikus görbe, S pedig egy N -edrendű ciklikus részcsoport E -ben, melyet \mathbb{Q} (ill. K) abszolút Galois-csoportja invariánsan hagy. Ezen parametrizáció kulcsfontosságú annak definiálásában, hogy mit jelent az, hogy egy elliptikus görbe *moduláris*. Az elliptikus görbék modularitásának igazolása pedig a Fermat-sejtés Wiles-féle bizonyításának legfontosabb lépése. A feladat a moduláris görbék konstukciójának feldolgozása és néhány fontos tulajdonságuk bemutatása a szakirodalom alapján.

Ajánlott irodalom: J. S. Milne: *Elliptic curves*, Booksurge, LLC, 2006.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

A-Sz.27. A Bruhat–Tits épület.

Témavezető: Zábrádi Gergely

A téma rövid leírása: Ha $n \geq 1$ egy egész szám, akkor a p -adikus számok fölötti $n \times n$ -es invertálható mátrixok csoportjához tartozó Bruhat–Tits épület egy szimpliciális komplexus, melynek csúcsai a \mathbb{Q}_p fölötti n -dimenziós vektortérben a \mathbb{Z}_p -rácok hasonlósági osztályai. Amennyiben $n = 2$, az épület egy $p + 1$ -reguláris végtelen fagráf, melyen a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ csoport tranzitívan hat. Az épületeknek számos alkalmazása van. Az egyik Ihara tétele 1966-ból, mely szerint az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ csoport minden torziómentes diszkrét részcsoportja szabad csoport. Továbbá az épület segítségével koncepciózusabban leírhatjuk Hecke-operátorok közti relációkat is. Egy harmadik alkalmazás Schneider és Stuhler nevéhez fűződik, melyben a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sima \mathbb{C} fölötti reprezentációi közötti bővítésekről bizonyítanak végességi tételeket. A szakdolgozat célja a Bruhat–Tits épület definíciója és egy vagy több alkalmazás bemutatása.

Ajánlott irodalom: A. Fiori: Building of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, D. Morris: Introduction to Bruhat–Tits buildings, P. Schneider, U. Stuhler: Resolutions for smooth representations of the general linear group over a local field, *J. reine angew. Math.* **436**, 19–32 (1993).

Ajánlott szakirányok: matematikus.